filosofia unisinos | Unisinos Journal of Philosophy

ISSN 1984-8234

Filosofia Unisinos
Unisinos Journal of Philosophy
22(2): 1-13, 2021 | e22206

Unisinos – doi: 10.4013/fsu.2021.222.06

Filosofía de la matemática: La intuición en el pensamiento de Kurt Gödel

Philosophy of mathematics: Intuition in Kurt Gödel's thought

Lina María Peña Páez
https://orcid.org/0000-0001-7452-7014
Universidad de San Buenaventura, Bogotá, Colombia. Email: yobogotana@gmail.com.

RESUMEN

La intuición matemática es un tema ampliamente abordado en la filosofía de la ciencia. En este artículo se estudia la idea que sobre ella tiene, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos: Kurt Gödel. Cuando se revisan sus obras es inevitable encontrarse con el uso de la palabra "intuición" en muchas de sus demostraciones, y en algunos casos no resulta evidente qué deberíamos entender por esta noción. A veces, la usa indicando que es una facultad similar a la percepción de la física. En otras ocasiones, supone que es la encargada de validar los axiomas dotándolos de evidencia, lo que implica verla como un hecho psicológico. Pero resulta curioso, por ejemplo, que no apele a ella cuando se refiere a la creatividad.

Palabras Claves: Gödel, intuición matemática, visión, facultad, experiencia.

ABSTRACT

Mathematical intuition is a widely discussed topic in the philosophy of science. This article studies the idea that Kurt Gödel has about it, one of the greatest mathematicians of all time. When his works are reviewed, it is inevitable to find the use of the word "intuition" in many of his demonstrations, and in some cases it is not clear what we should understand by this notion. Sometimes he uses it to indicate that it is a faculty similar to the perception of physics. On other occasions, it assumes that it is in charge of validating the axioms by providing them with evidence, which implies seeing it as a psychological fact. But it is curious, for example, that it does not appeal to her when it comes to creativity.

Keywords: Gödel, mathematical intuition, vision, faculty, experience

Introducción

Gödel no sólo fue un brillante matemático, sino que, gracias a las implicaciones de sus resultados de incompletud, logró ser muy influyente en la filosofía de la matemática. Cuando en 1931 logró probar "que todo sistema formal que contenga un poco de aritmética es necesariamente incompleto y que es imposible probar su consistencia con sus propios medios" (Gödel, 2006, p. 13) revolucionó las ideas vigentes hasta el momento en filosofía de la matemática; mostrando que las posiciones tradicionales como el logicismo, el intuicionismo y el formalismo no eran totalmente satisfactorias.

Gödel demostró que un sistema formal que sea recursivo y del que se puedan derivar los axiomas de Peano como teoremas, no es completo. También demostró que, si de un sistema se puede afirmar que es consistente, entonces no es posible derivar del mencionado sistema una regla que asegure su consistencia. Por tanto, la aritmética y la teoría de conjuntos deben excluirse del dominio de la lógica, dado que son sistemas esencialmente incompletos de los que no se puede brindar una caracterización usando reglas de inferencia. De ahí que, "el resultado metamatemático gödeliano es la última estocada contra el logicismo, y representa la imposibilidad de llevar a cabo la derivación de la matemática a partir de la lógica, tanto en el plano teoremático como en el conceptual" (Silva, 2019, pp. 198–199). Los aportes de Gödel mostraron que la lógica es incompleta y que el logicismo es insostenible puesto que "no puede reflejar el aspecto esencialmente creador del pensamiento matemático" (de Lorenzo, 1979, p. 435).

Tanto formalistas como intuicionistas, privilegiaban la matemática finitaria, considerándola como la única significativa y verdadera. A diferencia del intuicionismo, el formalismo aceptaba la matemática clásica, incluidos aspectos transfinitos, dado que ellos servirían para obtener nuevos resultados finitarios. La única exigencia del programa formalista era probar la consistencia formal de la matemática clásica, sin embargo:

> *En 1931 Gödel mostraría que esta exigencia del programa hilbertiano era imposible de cumplir. Pero ya en esta discusión de 1930 Gödel manifiesta sus dudas filosóficas respecto al sentido último del programa formalista. Incluso si la prueba de consistencia del sistema formal de la matemática clásica fuese posible, ello, por sí solo, no garantizaría la verdad de los teoremas matemáticos finitarios obtenidos con su ayuda. (Gödel, 2006, p. 88).*

Por su parte, Brouwer "rechazaba el empleo indiscriminado de la lógica clásica, admitiendo su validez y adecuación para las clases finitas, pero no su extensión para la clases infinitas"(de Lorenzo, 1979, p. 422). Luego de sus trabajos dedicados al logicismo y al formalismo Gödel ahondará en la lógica intuicionista. Gödel muestra que la teoría de números y la aritmética clásicas pertenecen a la teoría de números y la aritmética intuicionista, interpretadas de una manera algo diferente a la convencional. La razón de dicha afirmación radica

> *[…] en el hecho de que la prohibición intuicionista de negar sentencias universales para formar sentencias existenciales pierde su eficacia al permitir que el predicado de absurdo sea aplicado a sentencias universales, lo que formalmente conduce a exactamente las mismas sentencias admitidas en la matemática clásica. (Gödel, 2006, p. 134).*

Entones puede declararse que, en el intuicionismo, las restricciones se justifican sólo para el análisis y la teoría de conjuntos. Estas consideraciones "suministran una prueba de consistencia para la teoría de números y la aritmética clásicas. Sin embargo, esta prueba no es 'finitaria' en el sentido dado a esta palabra por Herbrand, siguiendo a Hilbert" (Gödel, 2006, p. 135).

Para Gödel los sistemas formales poseían determinadas propiedades metateóricas (que para él tenían un sentido intuitivo): la consistencia, la completitud y la decidibilidad. Revisemos la definición de cada una de ellas:

Consistencia: cuando un cálculo no es contradictorio, es decir, "cuando no es el caso que una de sus fórmulas y su negación sean demostrables en él" (Gödel, 1994, p. 25).

Completitud: cuando cada una de las fórmulas del sistema o su negación es demostrable en él.

Decidibilidad: cuando al aplicar, en un número finito de pasos, un procedimiento algorítmico (mecánico), se puede decidir o determinar "si cada una de las fórmulas aceptables es o no demostrable en él" (Gödel, 1994, p. 25).

El teorema de incompletitud establece que es imposible que alguien al mismo tiempo pueda establecer un sistema bien definido de axiomas y reglas; y percibir con certeza matemática que todos los axiomas y reglas son correctos y contienen a toda la matemática. De las consideraciones de Gödel se puede entender por qué muchos sistemas formales, aunque son consistentes, no pueden ser completos y decidibles y la propiedad de ser consistente tampoco puede ser demostrada.

Los teoremas de Gödel desmienten esa mítica creencia que el hacer matemático se debe centrar, exclusivamente, en la demostración formal. Llevan al cuestionamiento de si la axiomatización y la formalización son adecuadas para el hacer matemático: "desde un punto de vista estrictamente intuicionista la cuestión no existe, porque no se admite la segunda componente, la axiomatizadora" (de Lorenzo, 1979, p. 432).

Las tesis de Gödel sobre la imposibilidad de demostrar todas las proposiciones verdaderas en un sistema formal que cumple determinadas condiciones trajeron consecuencias filosóficas para la matemática:

Probar la consistencia de las teorías matemáticas con medios puramente matemáticos es imposible. Para Hilbert consistencia es sinónimo de existencia. Mientras en la ciencia empírica la existencia depende de la experiencia y de la teoría, en matemáticas depende de la consistencia formal. Pero gracias a Gödel, quien mostró que no puede probarse la consistencia, la intuición cobra un papel tan importante como la experiencia en las ciencias empíricas: "En este sentido lo que indican los teoremas gödelianos es que no existe ningún sistema formal completo para la Aritmética que, siendo consistente, pueda ser descrito con rigor formal" (de Lorenzo, 1979, p. 428).

La verdad de ciertos enunciados debe ser intuitiva. Puesto que la imposibilidad de demostrar un enunciado no implica que este no pueda ser verdadero, se concluye que verdad y demostrabilidad no son equivalentes. Esta distinción fue un éxito, como principio heurístico, acabando con el sueño de "una matemática segura, consistente, decidible, categórica, formalizable y completa" (Gödel, 1994, pp. 95–96), dando opción al paralelismo con la ciencia empírica.

A pesar de la insistencia por parte del formalismo de certificar la certeza matemática eliminando la intuición matemática, Gödel demostró que las matemáticas no funcionaban sin ella:

> *Restringirnos a consideraciones sintácticas formales ni siquiera asegurará la coherencia. Pero estas intuiciones matemáticas que no se pueden eliminar y no se pueden formalizar: ¿qué son? ¿Cómo llegan a estar disponibles para personas como nosotros? Una vez más, nos enfrentamos a la naturaleza misteriosa del conocimiento matemático, a la naturaleza misteriosa de nosotros mismos como conocedores de las matemáticas. (Goldstein, 2005, pp. 198–199).*

El teorema de incompletitud produjo un giro en la filosofía de la matemática. Antes de los resultados del teorema, la comunidad científica asumía que la verdad matemática consistía en la demostrabilidad, pero para Gödel no existía ningún método formal que permitiera demostrar todas las verdades de la matemática. Sus resultados más importantes repercutieron tanto en la lógica, como en la matemática. El teorema de incompletitud establece que es imposible que alguien al mismo tiempo pueda establecer un sistema bien definido de axiomas y reglas; y percibir con certeza matemática que todos los axiomas y reglas son correctos y contienen a toda la matemática.

Bajo las premisas descritas, se comprende el que Gödel "desconfíe" de los intentos formalistas de interpretar la matemática y preste mayor atención a la intuición matemática. En particular, él sospechaba que la hipótesis del continuo no se sigue de los otros axiomas de la teoría de conjuntos, "pues tiene consecuencias *intuitivamente* poco plausibles" (Gödel, 2006, p. 352). Entonces se pregunta

> *¿en qué podemos basarnos para buscar nuevos axiomas de la teoría de conjuntos? En dos cosas: en la intuición matemática (que corresponde a la sensación física) y en el apoyo indirecto que presta a una hipótesis (tanto en la física como en la matemática) el hecho que se sigan de ella consecuencias verificables (por ejemplo, resultados numéricos computables) difíciles de obtener sin ella y de que no se sigan de ella consecuencias indeseables. (Gödel, 2006, p. 352).*

En este artículo, nos interesa repasar algunas de las consecuencias filosóficas de la obra de Gödel, en particular las concernientes a la intuición matemática, más que los resultados matemáticos de la misma. Al recorrer los escritos de Kurt Gödel es habitual encontrar el término "intuición" en muchas de sus aseveraciones. Son frecuentes las expresiones como "teoremas intuitivamente claros" o "significado intuitivo de los términos primarios", entre otras. Para Gödel, la intuición matemática no parece ser un método de conocimiento. Lo que sí tiene claro es que la necesita para "hacer" matemáticas. Por tanto, surgen preguntas tales como: ¿en qué sentido necesita Gödel la intuición?, ¿para captar los conceptos?, ¿para entender las proposiciones matemáticas?, ¿para validar los axiomas?, ¿la intuición lo es de la totalidad o de una parte?, ¿para mostrar que los objetos de la matemática existen?, etc.

En muchos de los escritos sobre el pensamiento y la obra de Gödel se ha asumido la intuición, principalmente, como una facultad análoga a la percepción del mundo físico, o la han catalogado como una facultad que permite interactuar con objetos abstractos (Crowe, 1988; Goldstein, 2005; Hallett, 2006; Kitcher, 1985; Maddy, 1980; Nutting, 2015; Parsons, 1995). Nuestro objetivo será clasificar los diferentes "usos" que Gödel le ha dado a la intuición, incluyendo no sólo la interpretación ampliamente estudiada que hemos mencionada sino también la intuición matemática como visión global, como conocimiento no inmediato y como hecho psicológico. Lo que nos llevará a comprender la intuición matemática como "un proceso, donde el mundo real y los conocimientos previos del individuo juegan un papel importante" (Peña Páez, 2020).

1. La intuición como visión global

Para Gödel la inagotabilidad de la matemática implica que se pueden generar cada vez más y más axiomas. Es decir, la mente, en su uso, no es estática, por el contrario, está en constante desarrollo, lo que se puede ejemplificar "considerando la serie infinita de los axiomas de infinitud cada vez más potentes en la teoría de conjuntos, cada uno de los cuales expresa *una nueva idea o intuición*. Un proceso similar ocurre respecto a los términos primitivos" (Gödel, 2006, p. 197).

Cuando Gödel se refiere a la teoría de conjuntos con respecto a la aritmética, afirma que: "no tenemos una *intuición suficientemente clara* del universo de la teoría de conjuntos. Sabemos lo que son los números naturales y tenemos, por tanto, una *visión relativamente clara* del universo de la aritmética" (Gödel, 2006, p. 224). Luego, a partir de la definición de John von Neumann sobre los conjuntos, entendidos como el resultado de iterar un número cualquiera (finito) de veces, partiendo del conjunto vacío, Gödel asume que: "esto nos proporciona una cierta *intuición* de la constitución del universo de la teoría de conjuntos (Gödel, 2006, p. 224). Todo ello apunta a una conexión entre intuición y visión.

En el libro *Ensayos inéditos*, el editor Rodríguez Consuegra nos presenta una idea de lo que podría significar la intuición matemática para Gödel:

> *Todo intento formalista de interpretar la matemática está destinado al fracaso, pues olvida que ha de ser nuestra intuición matemática la que nos sirva de guía en la construcción de los sistemas formales, que deben dar cuenta precisa de aquellos conceptos objetivos, mientras que tal intuición no puede*

reemplazarse por ningún tipo de prueba de consistencia, o por ningún otro recurso similar interpretado de forma 'reductiva'. (Gödel, 1994, p. 30).

Queda claro que, para Gödel, la intuición matemática es diferente de la prueba formal. Es una *guía* que puede mostrar el camino para llegar a la construcción de conceptos y proposiciones. Sin embargo, esa guía, esa visión o ese proceso, requiere que quien está inmerso en el trabajo matemático conozca del tema en cuestión para que no se "pierda" en el camino:

Las teorías axiomáticas, en particular, tienen un aspecto imponente: parecen actos de creación a partir de la nada. Pero, desde luego, no hay tal cosa. Toda teoría axiomática se edifica sobre la base de conocimientos disponibles y con la ayuda de conceptos y técnicas preexistentes. Se comienza por conocer a fondo el material existente y los instrumentos, así como el artesano comienza reuniendo la materia prima y los implementos. Luego se trata de lograr una visión sinóptica del campo. (Bunge, 1996, p. 140).

Cuando Gödel "desarrolló" su teorema de incompletitud recurrió a todo ese conocimiento matemático que había "aprendido" durante años y que era como un cúmulo de saberes que interactuaba en su pensamiento. Con esto queremos mostrar dos situaciones: la necesidad de un bagaje matemático y la capacidad intelectual de cada individuo de "ver" o "intuir" lo que otros ante el mismo hecho no pudieron comprender:

El matemático talentoso mira un rompecabezas recalcitrante desde un nuevo punto de vista, 'intuyendo' que una maniobra particular ayudará con la suma de una serie o la evaluación de una integral, que un problema en la teoría de números reduce a un resultado en la teoría de funciones. (Kitcher, 1984, p. 61).

El mismo Gödel afirma que la intuición matemática no es un relámpago de creatividad que aparece en la mente de cualquier individuo. No. En realidad, requiere de la experiencia matemática y de las habilidades obtenidas en el trabajo continuo. Estas intuiciones parecen abiertas, prometen observaciones adicionales, más aún este tipo de intuición se puede cultivar: "ya que a través de la experiencia se pueden desarrollar habilidades para una observación más cercana y más precisa" (Burgess, 2014, p. 21).

Para Gödel, la intuición es algo así como una idea sugerente, necesaria para el trabajo del matemático. Tal concepción le permite afirmar que "los axiomas básicos de la teoría de conjuntos son altamente plausibles, para ser aceptados, por ejemplo, por cualquier persona con experiencia directa en la teoría de conjuntos y conocimiento íntimo de las consecuencias matemáticas de varios principios y técnicas de la teoría de conjuntos" (Hallett, 2006, p. 119). Es decir, la intuición puede ser desarrollada por un sujeto con la educación adecuada.

Cuando Gödel se refiere a las nuevas intuiciones matemáticas, entiende que son *sugerencias plausibles* que aparecen después de la experiencia con el uso de algún sistema axiomático. Lo que se impone no es el producto de la intuición sino el producto de la reflexión sobre el concepto, "cuya 'percepción' es el producto real de la intuición" (Hallett, 2006, p. 121). Así:

No es posible invocar la intuición como una especie de piedra de toque de la verdad para los nuevos principios. Decidir sobre una nueva extensión para establecer la teoría será una cuestión deliberativa y reflexiva en la que la experiencia matemática de uno con un sistema dado juega un papel, y también lo es nuestro conocimiento de los desarrollos matemáticos específicos en la teoría (Hallett, 2006, p. 119).

La cita nos indica que, para Gödel, la intuición no es la fuente de la verdad, ni siquiera en los niveles más básicos de la matemática, pero destaca la necesidad de la reflexión y la deliberación para el desarrollo de nuevas teorías, así como reconoce la importancia que juega la experiencia matemática y los conocimientos adquiridos a través de la practica matemática.

Es gracias a una intuición matemática bien desarrollada que es posible *ver* que ciertas proposiciones son verdaderas. En la transcripción de una conversación entre Hao Wang y Gödel, citada por Rodríguez Consuegra, Gödel afirmó que:

> *No analizamos la intuición para ver una prueba, sino que mediente la intuición vemos algo sin prueba. Nos limitamos a describir, en lo que vemos, aquellos componentes que no pueden ser ulteriormente analizados […] Para entender una proposición debemos poseer una intuición de los objetos a los que se refiere. Si dejamos de lado la formulación en palabras, algo general nos llega de alguna manera. No podemos separar [tales objetos] completamente (Gödel, 1994, p. 34).*

2. La intuición es conocimiento de lo "dado"

La intuición matemática no es concebida como una facultad "que proporcione un conocimiento *inmediato* de los objetos" (Gödel, 2006, p. 427), parece más bien que podemos formar un concepto a partir de algo más que *es* inmediatamente dado. Este "algo" dado no es la sensación, sino que tiene que ver con los conceptos que se refieren a los objetos físicos, los cuales "contienen constituyentes cualitativamente diferentes de las sensaciones o meras combinaciones de sensaciones" (Gödel, 2006, p. 427). Debe notarse que por medio del pensamiento no puede crearse ningún elemento cualitativamente nuevo, sólo se pueden reproducir y combinar los ya existentes. Por lo tanto:

> *Puede notarse que la intuición matemática no necesita ser concebida como una facultad que proporciona un conocimiento inmediato de los objetos en cuestión. Más bien parece que, como en el caso de la experiencia física, formamos nuestras ideas también de esos objetos sobre la base de otra cosa que se da de inmediato. Solo que este algo no es, o no principalmente, las sensaciones (Gödel, 1990, p. 268).*

Es decir, existe algo más que las sensaciones que se dan de manera inmediata, lo que se deduce de considerar que las ideas que se refieren a componentes físicos son cualitativamente diferentes a las simples combinaciones de sensaciones. Para Gödel, la matemática dada está muy relacionada con los elementos abstractos que están contenidos en nuestras ideas empíricas, donde existe "una estrecha relación entre esta parte abstracta de la forma de los objetos y el concepto de conjunto en matemáticas" (Hallett, 2006, p. 123).

Como Kant, Gödel afirma que ni la percepción sensorial ni la intuición matemática otorgan un conocimiento inmediato de los objetos, sean empíricos o abstractos. La formación de ideas es el resultado de un proceso, "dicho proceso requiere que haya una contribución abstracta y *a priori* que supere la pluralidad de sensaciones" (Folina, 2014, p. 42). Coincidiendo nuevamente con Kant, Gödel considera que las sensaciones que nos producen los objetos se agrupan bajo ciertos conceptos, en particular un concepto general que puede determinarse como "objeto". Por ejemplo, para conocer y entender objetos concretos como discretos o unificados, es decir, enmarcados bajo los conceptos, fue necesaria la síntesis de las sensaciones a través de ideas abstractas como objeto o unidad. Puede entenderse la intuición como la "matemática dada". Es decir, se compara no sólo con la sensación sino con lo que se agrega para formar objetos empíricos. Para Gödel, el concepto de conjunto cumple la función de sintetizar o generar unidades. Por tanto, la intuición matemática de los objetos básicos, "aparece" luego del procesamiento abstracto de la sensación dada en la experiencia.

En el libro *Ensayos inéditos*, se afirma que para Gödel la intuición matemática "no proporciona conocimiento inmediato, sino que formamos nuestras ideas sobre la base de algo dado, que aquí no son las sensaciones" (Gödel, 1994, p. 111). Lo dado, en matemáticas, está relacionado con los objetos abstractos contenidos en las ideas empíricas. Esto no implica que los datos sean subjetivos, sino que son de una clase diferente, un tipo de realidad entre el sujeto y su contexto. Gödel usa el término intuición matemática en dos sentidos, hacia los objetos y hacia las proposiciones. Para él, la intuición matemática, cuando se usa para fines científicos, puede ser reemplazada por las convenciones sobre el uso de símbolos y su aplicación, pero la intuición no es *ipso facto* conocimiento.

Un aspecto que debe ser analizado en las ideas sobre intuición de Gödel, es su papel con respecto a los objetos abstractos. En mente debe tenerse en cuenta que "la intuición inmediata no es una forma misteriosa de percepción sensorial" (Tieszen, 2002, p. 365). Por conceptos abstractos deben entenderse aquellos que no tienen relación con objetos concretos. Es decir, debemos entenderlos como estructuras de pensamiento, pruebas o suposiciones. El punto interesante radica en que para Gödel lo importante es reflexionar sobre el significado de estas estructuras y a esa reflexión él la llama *intuición de conceptos*.

Ahora bien, en la descripción de la intuición de conceptos es clave entender que la cognición humana es intencional (en la cognición, los actos siempre están dirigidos hacia o sobre algo). Sin esta idea en mente podría pensarse que la intuición de conceptos es absurda. La intencionalidad implica dirección, "los actos cognitivos son perspectivas y no podemos tomar todas las perspectivas posibles sobre un objeto o dominio" (Tieszen, 2002, p. 369). Tanto creencias como actos cognitivos siempre involucran categorías de objetos, pues es la forma que tiene la mente de clasificar. Es decir, que siempre estamos interpretando sobre la forma del mundo, y la dirección de una intención siempre se da por medio de un concepto.

Los conceptos de la lógica y de la matemática son exactos, dado que implican idealizaciones. Por tanto, esta *intuición de conceptos* se puede refinar y ajustar con el tiempo. Este fenómeno es evidente si se revisa la forma extraordinaria en que las teorías matemáticas se han extendido con nuevos axiomas: "la idea clave para recordar aquí es que estamos hablando de hacia dónde se puede dirigir la mente. La intuición debe entenderse solo en estos términos" (Tieszen, 2002, p. 375).

Para Tieszen, la intuición debe ser entendida en términos de intencionalidad y dirección, lo que le permite explicar la intuición de los conceptos alejada de la idea clásica de relación causal, "lo que considero que está relacionado causalmente será una función de lo que permanece invariante en mi experiencia" (Tieszen, 2002, p. 384). Por tanto, el conocimiento matemático se da en términos de la direccionalidad hacia los invariantes.

Si Hilbert hubiese tenido éxito, la intuición solo se aplicaría a la configuración de signos concretos y reglas finitas y mecánicas, cuya manipulación permitiría la consistencia de teorías matemáticas. Pero este plan falló como lo demostraron los teoremas de incompletitud de Gödel y, por el contrario, se asume que los conceptos trascienden nuestra intuición en cualquier etapa, otorgándole a la intuición de los conceptos un carácter parcial. Así, "la intuición de los conceptos abstractos podría ignorarse o eliminarse si las matemáticas pudieran mecanizarse por completo" (Tieszen, 2002, p. 386). Los teoremas de incompletitud desvirtúan la idea de que la intuición de los conceptos abstractos pueda ser completamente mecanizada.

Vemos que en Gödel aparece una idea que involucra la intuición con un proceso dinámico, no con una facultad misteriosa, sino como una facultad en la que se puede educar a un individuo y que viene dotada de intencionalidad. Así mismo, también nos ha mostrado la necesidad de formalizar esa intuición:

> *el proceso dinámico en matemáticas tiene lugar entre la intuición y la formalización, esto es, se podría decir, entre lo que podemos entender y lo que podemos expresar y comunicar, o formalizar matemáticamente de la manera habitual. Esta es una interacción entre expresión y contenido, o incluso entre un resumen y el individuo" (van Atten et al., 2008, p. 302).*

3. Intuición como hecho psicológico

El término intuición suele aparecer cuando Gödel se refiere a la hipótesis del continuo de Cantor. Mientras que "el axioma de elección resulta *intuitivamente* evidente para casi todos los matemáticos (excepto para los constructivistas)" (Gödel, 2006, p. 351), la hipótesis de Cantor carece de evidencia intrínseca y fecundidad demostrativa. En este punto lo intuitivo tiene que ver con la *evidencia intrínseca*.

Pero que una proposición sea evidente para un individuo es un hecho psicológico, más que matemático. Por ejemplo, cuando Gödel se refiere al conocimiento de la matemática, asume que ésta se nos da en su totalidad y que no cambia. Asimismo, viene acompañada de una fuerte convicción: "una basada en la intuición (aquí, de esencias) y otra basada en el éxito (de la razón en un área particular)" (Lindström et al., 2009, p. 329). Para Gödel en la intuición se admiten errores, porque ella no es un asunto de todo o nada, viene en grados. Por ejemplo, en el caso del continuo de Cantor, el papel de la intuición es otorgarle "un significado bien definido a la pregunta y, de hecho, decidirla […] mediante una apelación a la psicología, Gödel sugiere que el significado y la capacidad de decisión puede ser asegurable sin recurrir al realismo" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 333).

Tendemos a sobreestimar la claridad con la que percibimos las cosas, las usamos tanto que se nos vuelven evidentes, y lo evidente no necesariamente es cierto. Esto significa que Gödel acepta la posibilidad del error, podría presentarse vagamente una esencia representada en parte simbólica o en parte intuitiva, lo que llevaría a tener una cierta evidencia, pero persiste la posibilidad del error: "también es en el reconocimiento de que la intuición no es un asunto de uno u otro, sino que viene en grados (es decir, las intuiciones son, en general, parciales) que Gödel ve una respuesta al escepticismo" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 336).

Para algunos autores puede entenderse la intuición en Gödel como un hecho psicológico. Gödel consideraba que es indudable el hecho psicológico de la existencia de una intuición lo suficientemente clara, para producir los axiomas de la teoría de conjuntos dándole sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de la hipótesis del continuo de Cantor. A este respecto en el suplemento a la segunda edición de la *Obras completas* se afirma lo siguiente:

> *El mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es lo bastante clara como para producir los axiomas de la teoría de conjuntos y una serie abierta de extensiones de éstos basta para dar sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de ideas tales como la hipótesis del continuo de Cantor. Lo que, sin embargo, quizá justifica más que nada la aceptación de este criterio de verdad en la teoría de conjuntos es el hecho de q e recurrir a la intuición matemática no es necesario únicamente para obtener respuestas unívocas a preguntas de la teoría de conjuntos transfinita, sino también para resolver problemas de la teoría finitaria de números (del tipo de la conjetura de Goldbach) 42 ,la significatividad y univocidad de cuyos conceptos apenas se puede poner en duda. (Gödel, 2006, p. 428).*

Ni siquiera los seguidores de la escuela brouweriana pondrían en duda la existencia de la intuición como un hecho psicológico que es capaz de abarcar los axiomas de las matemáticas clásicas, aunque para ellos el hecho psicológico se explicará "por la circunstancia de que todos estamos sujetos al mismo tipo de errores si no somos lo suficientemente cuidadosos en nuestro pensamiento" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 334). Esta postura es conflictiva, ¿quién nos aseguraría, por ejemplo, que una intuición provocada por un pensamiento insuficiente lleve a un juicio experto?

Ahora bien, Burgess (2014) sostiene que los juicios de inverosimilitud de Gödel son intuiciones heurísticas, entendiendo por este tipo de intuición: conjeturas plausibles. Cuando Gödel se pregunta por el sentido y la dirección de la solución al problema del continuo, parece indicar que sus juicios de inverosimilitud son del tipo juicios de plausibilidad, tal como los juicios que suelen plantear los matemáticos cuando se enfrentan a una conjetura. La diferencia radica en que los matemáticos discuten si eventualmente estas conjeturas serán probadas o refutadas, mientras que Gödel sabe que la conjetura del continuo no puede ser probada y sospecha que tampoco refutada.

Para Gödel, "la existencia, como un hecho psicológico, de una intuición que cubren los axiomas de la matemática clásica difícilmente puede ponerse en duda" (Folina, 2014, p. 60). Esto puede verse del hecho que los axiomas de la matemática clásica nos parecen evidentes o, por lo menos, plausibles. Entonces para Gödel la intuición matemática tiene como función producir convicción de las proposiciones que se obtuvieron gracias a la observación (o el cálculo), más aún, "subraya el hecho de que la intuición da lugar a una serie de extensiones "abiertas" de los axiomas" (Folina, 2014, p. 64).

Gödel estaba interesado en fracturar por dentro el programa formalista de Hilbert, y es que la verdad no puede ser expresada en un lenguaje consistente: "Gödel concluyó, entonces, que de los teoremas de incompletitud se deriva que la certeza de las matemáticas no se asegura después de probar ciertas propiedades por una proyección sobre sistemas de símbolos ajustados a ciertas reglas de transformación. La certeza en las matemáticas debe tener otra fuente: la intuición matemática" (Cardona, 2002, p. 34). Es decir, que una clase especial de intuición es la que permite tener conocimiento de los conceptos abstractos.

Que la intuición matemática pueda ser "interpretada" como un hecho psicológico muestra que las construcciones de las matemáticas son humanas y que esa sensación de evidencia sobre las proposiciones es solamente incuestionable en la medida en que el individuo que las "percibe" ha sido educado en ese mundo de las leyes de la matemática. Las demostraciones de incompletitud de Gödel serán evidentes únicamente para aquellos matemáticos o estudiantes que estén familiarizados con los conceptos de la teoría de conjuntos. Es decir, las proposiciones de la matemática son verdaderas en tanto que son contrastadas con un sistema de referencia especifico. La evidencia y el hecho psicológico dependen de ello.

4. La intuición matemática es análoga a la percepción en el mundo físico

En una de sus aseveraciones más famosas, Gödel destaca que a pesar de la lejanía de los objetos con respecto a la experiencia sensible, existe "algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos" (Gödel, 2006, p. 427). Según algunos estudiosos del pensamiento de Gödel, es posible que cuando él se refiere a la percepción de los objetos, éstos objetos, en realidad, sean los conceptos de la teoría de conjuntos, "tal lectura hace que Gödel adhiera a la opinión de que existe una facultad que se asemeja a la percepción sensorial pero que se dirige hacia ideas abstractas en lugar de cuerpos concretos" (Burgess, 2014, p. 20).

El paralelismo que hace Gödel entre la percepción sensible y la intuición sólo tiene sentido al interior de una teoría, sea de objetos físicos o de conceptos, o de todos a la vez. Nos encontramos, ahora, con una de las ideas más replicadas de Gödel, la que "equipara la intuición matemática a la percepción sensible, y la cuestión de la existencia de las entidades matemáticas a la de la existencia del mundo externo" (Gödel, 2006, p. 422). Afirmará, además, que no existe razón por la cual se deba tener menos confianza en la intuición matemática que en la percepción sensible, puesto que la intuición nos induce a construir nuevas teorías, con la esperanza que futuras percepciones concuerden con ellas. Es importante señalar que la analogía propuesta entre intuición matemática y percepción sensible no implica tanto el carácter empírico de la matemática, "sino el carácter 'intuitivo' de la ciencia empírica" (Gödel, 1994, p. 48).

Gödel toma ese carácter intuitivo de la ciencia, puesto que se viven nuevos vientos en el mundo académico, una nueva concepción de la ciencia, la muestra más creativa, basada en modelos y analogías inventadas, lejos de la generalización empírica. Ahora bien, Gödel sabe que los objetos de la teoría de conjuntos no están en el mundo físico. Entonces para que su analogía tenga sentido, él recurre a la intuición matemática para "percibir los objetos matemáticos y escoger la construcción que mejor los represente, entre todas las posibles" (Gödel, 1994, p. 76). Esta elección vuelve a conectar la intuición matemática con su interpretación como *guia* o *visión*.

La tesis de Gödel sobre el paralelismo matemático-físico, tiene como base la analogía de Russell, para quien los "axiomas no necesitan ser evidentes en sí mismos (aunque pueden serlo), sino que su justificación puede radicar en sus consecuencias, como ocurre en la física" (Gödel, 1994, p. 105). Entonces Gödel muestra que un fundamento racional de los axiomas es la percepción directa de su verdad, que podría ser dada por la intuición y el otro fundamento está basado en el éxito de sus aplicaciones.

Su paralelismo no es sobre los objetos en sí, sino sobre lo que él llama un "sistema satisfactorio" que puede ser conceptual o físico. Para el matemático, las paradojas son el resultado de una brecha entre la comprensión técnica y teórica de los términos involucrados; y la comprensión geométrica intuitiva de estos términos. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos el término "curva" tiene una definición diferente al mismo término en la geometría euclideana (Burgess, 2014). Y así como los sentidos pueden presentar, algunas veces, engaños al mundo físico, así sucede con las paradojas en el mundo de la matemática.

Kitcher comparte la idea de Gödel, según la cual, existe una similitud entre las paradojas de la teoría de conjuntos y los engaños de los sentidos en la física. Si existen las intuiciones matemáticas, la capacidad de que los procesos que nos permitan generar conocimiento, no está exenta de un error que nos permita caer en creencias falsas. Ahora bien, es la experiencia, en muchos casos, la que nos muestra si nuestras creencias son falsas o no, tanto en la matemática como en el mundo de la física:

> *La existencia de los engaños a los sentidos no es un obstáculo para nuestro conocimiento de la física; es un obstáculo para la tesis de que los procesos sensoriales que realmente garantizan nuestras creencias podrían continuar haciéndolo, sin que importe qué experiencia fuéramos a tener. Del mismo modo, las paradojas de la teoría de conjuntos no desafían la posibilidad del conocimiento matemático, sino que amenazan el apriorismo. (Kitcher, 1984, p. 63).*

Otro argumento a favor de la analogía tiene que ver con las leyes deducidas de la realidad y las leyes matemáticas. Para Gödel si las leyes de la realidad pueden falsarse, por algún tipo de observación adicional, "lo mismo valdría en matemática si apareciera una inconsistencia, pues la falsación de leyes observables no es sino la inconsistencia entre diferentes métodos de detectar la misma cosa" (Gödel, 1994, p. 115).

En la filosofía contemporánea se ha entendido la intuición matemática como la fuente "de supuestos conocimientos no obtenidos por inferencia consciente de algo más inmediato" (Burgess, 2014, p. 12). Esta definición parece diferenciar dos tipos de conocimiento, uno sensible y otro no sensible. Gödel comparte esta distinción. Para él debe diferenciarse la intuición geométrica de la intuición racional (matemática). Para el matemático, la intuición geométrica es una intuición física *a priori*, mientras que la intuición espacial euclideana, en su aspecto puramente matemático, es correcta y representa una cierta estructura que ya existe en el ámbito de los objetos matemáticos. El contenido de las proposiciones de la física como de la matemática se dan gracias a la existencia de los objetos de la física y de la matemática. Los primeros "nos son dados en la intuición sensible y los segundos en la intuición matemática" (Cardona, 2002, p. 37).

Para Gödel, la intuición también puede concebirse "como una condición previa para la adquisición de conocimiento matemático de alto nivel" (Hallett, 2006, p. 120). Esto se puede deducir de su analogía de las matemáticas con el mundo de la física, puesto que, para el matemático, la teoría de conjuntos superior guarda una relación con el resto del conocimiento matemático, como la práctica matemática con las matemáticas de la vida cotidiana, de la misma manera como la física teórica se relaciona con la ciencia física y el sentido común con el conocimiento del mundo: "la percepción sensorial nos da conocimientos simples de hechos acerca de los objetos físicos, y una facultad de intuición matemática nos da el conocimiento de los conjuntos, de los números y de algunos de los axiomas simples concernientes a ellos" (Maddy, 1980, p. 163).

Entendemos, por tanto, que Gödel parte de una visión global para comprender los componentes en su contexto, tomando en cuenta la interacción entre las partes y el todo. Concluyendo, entonces, que la intuición matemática parte de un contexto, que bien puede ser físico o matemático.

Consideraciones finales

Los teoremas de Gödel trajeron consecuencias filosóficas para la matemática, en palabras de Goldstein: "son a la vez matemáticos y metamatemáticos" (Goldstein, 2005, p. 28). Es decir, son rigurosos porque han sido demostrados y al mismo tiempo sus resultados dicen algo sobre la naturaleza de la matemática:

> *Es como si alguien hubiera pintado un cuadro que logra responder a las preguntas básicas de la estética; un paisaje o retrato que representa la naturaleza general de la belleza y tal vez incluso explica por qué se mueve con nosotros la forma en que lo hace. (Goldstein, 2005, p. 28).*

Los teoremas de incompletitud de Gödel no excluyen temas de interés propios de la matemática, a saber, la certeza, la consistencia y la aprioricidad. Sin embargo, apunta Goldstein que el hecho de llamarse *teorema de incompletitud* parece suguerirnos que en la rigurosa ciencia "el elemento humano prevalece sobre esos sistemas tan severamente precisos, los de las matemáticas y la física teórica, difuminándolos con nuestra propia inexactitud y subjetividad" (Goldstein, 2005, pp. 36–37).

Para Gödel, la intuición matemática "parece ser un factor epistemológico básico en el conocimiento de las matemáticas altamente abstractas, en particular, en la teoría superior de conjuntos" (Parsons, 1995, p. 45). Como hemos revisado a lo largo de este artículo, Gödel en su eminente obra matemática recurre a la intuición matemática, invitándonos no sólo a "reconocer el hecho de la intuición con respecto a los conceptos y axiomas, sino también a darle crédito" (Parsons, 1995, p. 70). Eso no implica que debamos concebir la intuición como la encargada de brindarnos conocimientos incuestionables ni necesariamente verdaderos.

Gödel está interesado en la intuición como fuente de los axiomas que son la base para las deducciones matemáticas. Su interés no parece encaminado al cómo se descubren las matemáticas, como tampoco al proceso creativo que está detrás de ellas, lo cual resulta extraño siendo un creativo y brillante matemático que sabe que no se llegan a las grandes ideas siguiendo una receta, primero esto, segundo aquello, etc.

Cuando Gödel considera la intuición como una guía o visión global, que no otorga conocimiento inmediato, ni infalible, nos muestra una postura que implica que la intuición matemática es un *proceso dinámico*, que requiere de la experiencia del individuo.

Cuando se asume que la intuición matemática tiene como rol proporcionar evidencia o certeza, se cae en la intuición como hecho psicológico. Por tanto, es una facultad que puede ser aprehendida y cultivada, y que no es propiedad de sólo unos cuantos. Es obvio, tal y como dice Kitcher, que algunas mentes son extraordinarias y han logrado lo que otras no han podido. Sin embargo, no implica que no se pueda "educar" esa facultad para conseguir mejores resultados. ¿Y si estamos hablando de educación no sería posible concebir la intuición como un proceso en este sentido?

En la intuición como análoga a la percepción de los sentidos Gödel menciona la importancia de las paradojas en la teoría de conjuntos, asumiendo que son un "problema" similar al que los sentidos le pueden presentar a la física. Esta situación nos permite mostrar que la intuición puede interpretarse como un proceso:

> *La similitud entre las paradojas y las ilusiones sensoriales me parece correcta. Si suponemos que efectivamente existen intuiciones matemáticas, entonces la capacidad de tales procesos para pro-*

> *ducir conocimiento no se ve impugnada por nuestra incapacidad para discriminarlos de los procesos que generan creencias falsas, como tampoco la posibilidad de conocimiento perceptual está excluida por la dificultad de discriminar procesos sensoriales verídicos de los no verídicos. (Kitcher, 1984, p. 63).*

De la exposición de las diferentes concepciones sobre la intuición matemática en Gödel no se deduce que el conocimiento que ella produce sea a priori. Como lo anota Kitcher:

> *la intuición matemática es un proceso no empírico. Por lo tanto, cualquiera que confunda procesos no empíricos que realmente garantizan la fe con garantías a priori leerá a Gödel como un defensor del apriorismo. Incluso si uno no hace esta combinación, las intuiciones matemáticas que Gödel hipotetiza serán procesos que están disponibles dada cualquier experiencia suficiente" (Kitcher, 1984, p. 59).*

De la cita y de la revisión que hemos realizado sobre algunas consecuencias para la filosofía de las matemáticas de la obra de Gödel evidenciamos que la intuición matemática puede entenderse como un proceso dinámico, el cuál requiere de los conocimientos matemáticos y de la experiencia del matemático que crea conceptos, inventa teorías o enuncia nuevas proposiciones.

Referencias

BUNGE, M. 1996. *Intuición y razón*. Buenos Aires, Editorial Sudamericana.

BURGESS, J. P. 2014. Intuitions of three kinds in Gödel's views on the continuum. In J. KENNEDY (Ed.), *Interpreting Godel: Critical Essays*. Cambridge, Cambridge University Press, pp. 11–31. https://doi.org/10.1017/CBO9780511756306.

CARDONA, C. 2002. Algunas consecuencias filosóficas del trabajo de Kurt Gödel. *Diánoia*, **XLVII**: 23–50.

CROWE, M. J. 1988. Ten Misconceptions about Mathematics and It's History. In P. ASPRAY; W. KITCHER (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis, University of Minnesota Press, pp. 260–277.

DE LORENZO, J. 1979. Logica y matematica en Gödel. *Estudios Filosóficos*, **28**(79): 391–453.

FOLINA, J. 2014. Gödel on how to have your mathematics and know it too. In J. KENNEDY (Ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*. Cambridge, Cambridge University Press, pp. 32–55. https://doi.org/10.1017/CBO9780511756306.

GÖDEL, K. 1990. *Collected Works: Vol. II*. F. SOLOMON; J. W. DAWSON JR; S. C. KLEENE; G. H. MOORE; R. M. SOLOVAY; J. VAN HEIJENOORT (Eds.). Oxford, Oxford University Press.

GÖDEL, K. 1994. *Ensayos inéditos*. F. R. CONSUEGRA (Ed.). Barcelona, Biblioteca Mondadori.

GÖDEL, K. 2006. *Obras Completas*. J. MOSTERÍN (Ed.). Madrid, Alianza Editorial.

GOLDSTEIN, R. 2005. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Godel*. New York, Atlas Books.

HALLETT, M. 2006. Gödel, Realism and Mathematical 'Intuition.' In E. CARSON; R. HUBER (Eds.), *Intuition and the Axiomatic Method*. Dordrecht, Springer Netherlands, pp. 113–131.

KITCHER, P. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford, Oxford University Press.

KITCHER, P. 1985. Mathematical Intuition. In P. KITCHER. *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford, Oxford University Press.

LINDSTRÖM, S.; PALMGREN, E.; SEGERBERG, K.; STOLTENBERG-HANSEN, V. (Eds.). 2009. *Logicism, Intuitionism, and Formalism*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8926-8.

MADDY, P. 1980. Perception and Mathematical Intuition. *The Philosophical Review*, **89**(2): 163–196.

NUTTING, E. S. 2015. To Bridge Gödel's Gap. *Philosophical Studies*, **173**(8): 2133–2150 https://doi.org/10.1007/s11098-015-0601-3.

PARSONS, C. 1995. Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought. *The Bulletin of Symbolic Logic*, **1**(1): 44–74.

PEÑA-PÁEZ, L. M. (2020). Consideraciones sobre la intuición matemática. *Agora-Papeles de Filosofía*, **39**(2): 127–141.

SILVA, R. Da. 2019. Apuntes para una introducción al logicismo. *Apuntes Filosóficos*, **28**(55): 182–199.

TIESZEN, R. 2002. *Gödel and the Intuition of Concepts*. Springer, pp. 363–391. https://link-springercom.ezproxy.javeriana.edu.co/content/pdf/10.1023%2FA%3A1021247624209.pdf.

VAN ATTEN, M.; BOLDINI, P.; BOURDEAU, M.; HEINZMANN, G. 2008. *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007). The Cerisy Conference*. M. VAN ATTEN; P. BOLDINI; M. BOURDEAU; G. HEINZMANN (Eds.). 1st ed. Basel, Birkhäuser Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8653-5.

VAN ATTEN, M.; KENNEDY, J. 2009. Gödel's Modernism: On Set-Theoretic Incompleteness, Revisited. In S. LINDSTRÖM; E. PALMGREN; K. SEGERBERG; V. STOLTENBERG-HANSEN (Eds.), *Logicism, Intuitionism, and Formalism*. Springer, pp. 303–355.

Submitted on August 03, 2020.
Accepted on February 18, 2021.