

# **Análise paramétrica de um modelo de transferência de tensão por aderência em peças de concreto armado fletidas**

**Daiane de Sena Brisotto**

Aluna de Pós graduação em Eng. Civil - UFRGS  
Av. Osvaldo Aranha, 99  
Porto Alegre, RS, Brasil, CEP 90035-051  
daiabrisotto@yahoo.com.br

**Virgínia Maria Rosito d'Avila**

Profª Drª da Universidade Federal do Rio grande do sul –UFRGS  
Av. Osvaldo Aranha, 99  
Porto Alegre, RS, Brasil, CEP 90035-051  
vichy@ufrgs.br

**Eduardo Bittencourt**

Prof Dr da Universidade Federal do Rio grande do sul –UFRGS  
Av. Osvaldo Aranha, 99  
Porto Alegre, RS, Brasil, CEP 90035-051  
bittenco@cpgec.ufrgs.br

## **Resumo**

A propriedade estrutural mais marcante do concreto é sua baixa resistência à tração frente a sua resistência à compressão. Isto faz com que estruturas de concreto funcionem fissuradas já para baixos níveis de carga. As fissuras reduzem a rigidez da estrutura; quando elas se formam, a distribuição interna das tensões e deformações é grandemente modificada e o concreto começa a apresentar comportamento não-linear. Os modelos numéricos que pretendam fazer uma análise realística do funcionamento de estruturas deste material devem reproduzir corretamente este comportamento. O objetivo deste trabalho é fazer uma análise paramétrica da influência que determinadas variáveis de um modelo de transferência de tensão por aderência, entre a armadura e o concreto adjacente, têm sobre o comportamento global de peças de concreto armado fissuradas. Na análise numérica, via método dos elementos finitos, será empregada um modelo de fissura incorporada que leva em consideração a contribuição da armadura no equilíbrio de forças interno do elemento. Os modelos incorporados se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos. As previsões numéricas são comparadas com resultados experimentais.

**Palavras-chave:** concreto armado, fissuração, modelo incorporado.

## **Abstract**

The most noticeable structural property of concrete is its low tensile strength compared to its compressive strength. As a result of that, concrete structures may work cracked even for low level of loading. Cracks reduce structure stiffness; when they are created, internal stress and strain distributions are greatly modified and concrete starts to present a non-linear behavior. These aspects must be correctly reproduced by numerical models in order to have a realistic analysis of concrete structures. The aim of this work is to make a parametric analysis of the influence of certain variables, in a stress-transfer model by adherence between concrete and reinforcement, over the global behavior of cracked reinforced concrete. In the numerical analysis presented here, via Finite Element Method, an embedded crack model is used. This model takes into consideration the contribution of reinforcement in the internal equilibrium of the element. The embedded models are based on the concept of embedded discontinuities inside the elements. The numerical results are compared to experiments.

**Key words:** reinforced concrete, cracking, embedded model.

## 1. Introdução

Em estruturas de concreto armado, devido ao fato do valor da deformação de ruptura à tração do concreto ser muito baixo, na ordem de 0,1%, as primeiras fissuras podem se formar sob cargas de serviço. Considerando que as fissuras têm uma influência muito grande no comportamento estrutural global, a realização de estudos para prever e controlar a fissuração do concreto é de essencial importância. Particularmente, dois aspectos têm especial importância: como representar a fissura; como simular o comportamento do material fissurado.

Em análise via Método dos Elementos Finitos de estruturas de concreto, as fissuras têm sido representadas de duas formas distintas: discreta ou distribuída.

Um modelo de fissura discreta, a fissura é modelada pela separação dos lados dos elementos. A menos que a trajetória da fissura seja conhecida antecipadamente, as fissuras discretas são modeladas alterando-se a malha para suportar a propagação das mesmas, o que dificulta a utilização destes modelos quando se têm várias fissuras espalhadas ao longo da peça, como no caso de estruturas de concreto armado (Ngo e Scordelis, 1967; Hillerborg *et al.*, 1976; Ingraffea *et al.*, 1984; Tijssens *et al.*, 2000; Chen e Yang, 2005).

Nos modelos de fissuração distribuída, a fissura é modelada através de uma alteração na equação constitutiva do contínuo nas vizinhanças da fissura. A descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento. Os modelos de fissura distribuída apresentam algumas deficiências quando empregados para estudar situações de fraturamento localizado que ocorrem, principalmente, nas estruturas de concreto simples (Rashid, 1968; Bazant e Cedolin, 1979; Oliver, 1989; Lu *et al.*, 2007).

Recentemente, modelos de fissura incorporada têm sido desenvolvidos como uma alternativa para a simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões. As fissuras podem se propagar em qualquer direção e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada (Grootenboer *et al.*, 1981; Ortiz *et al.*, 1987; Dvorkin *et al.*, 1990; Dvorkin e Assanelli, 1991; Dominguez *et al.*, 2004).

Já para simular o comportamento pós-início de fissuração de peças de concreto armado, vários modelos teóricos têm sido propostos. Estes modelos podem ser divididos, genericamente, em três grupos:

- a) modelos semi-empíricos: nestes modelos, os vários fenômenos que ocorrem durante a fissuração do concreto são considerados de forma conjunta e sua calibragem é feita através de valores obtidos em ensaios experimentais;
  - b) modelos com transferência de tensão: estes modelos se baseiam na transferência de tensão, por aderência, entre o aço e o concreto. O aparecimento da primeira fissura ocorre quando a tensão de tração no concreto supera o valor da resistência à tração, mas a formação de novas fissuras está associada ao fato de se ter espaço suficiente para ocorrer a transferência de tensão entre os materiais;
  - c) modelos baseados na mecânica da fratura: nestes modelos, a evolução da fissuração é determinada através de um balanço energético. Uma fissura cresce se tiver energia armazenada suficiente para ser
-

liberada durante o fraturamento do material.

Nos modelos dos dois primeiros grupos, a fissuração do material é governada pela resistência à tração do concreto; já nos modelos do terceiro grupo, o parâmetro governante é a energia de fratura. A escolha de qual grupo utilizar está vinculada ao tipo de problema a ser analisado. Na análise da fissuração de peças de concreto simples, onde normalmente se forma uma fissura predominante, a energia de fratura deve ser o parâmetro governante. Já em peças de concreto armado, pode-se obter bons resultados empregando a resistência à tração como parâmetro governante. Isto se deve ao fato de que a presença da armadura ocasiona uma redistribuição de tensões, resultando o aparecimento de múltiplas fissuras ao longo da peça.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise paramétrica da influência que determinadas variáveis, de um modelo de transferência de tensão por aderência, têm sobre o comportamento global de peças de concreto armado fissuradas.

Na análise numérica, via método dos elementos finitos, será empregada um modelo de fissura incorporada, proposto por d'Ávila (2003), que leva em consideração a contribuição da armadura no equilíbrio de forças interno do elemento. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos.

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen (1977; 1979). O comportamento do material fissurado é representado através do modelo de transferência de tensão por aderência de (Russo *et al.*, 1990; Russo e Romano, 1992).

Já para representar as barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hruday (1989). Neste modelo, permite-se uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto. O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento

## 2. Transferência de tensão por aderência

A seguir, apresenta-se o modelo de transferência de tensão por aderência utilizado neste trabalho (Russo e Romano, 1992; Russo *et al.*, 1990; FIB – Bulletin 10 – 2000). O modelo é apresentado fazendo-se um estudo sobre o fenômeno de transferência de tensão por aderência entre as barras da armadura e o concreto adjacente, fenômeno este que acarreta uma rigidez adicional à peça, denominada "*tension stiffening*".

Em peças de concreto armado tracionadas, ocorre um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente sempre que as deformações da armadura e do concreto tenham valores diferenciados. Este escorregamento é devido, principalmente, ao esmagamento do concreto frente às saliências das barras da armadura. A alta tensão no concreto em frente às saliências, ocasiona tensões de tração no concreto no entorno da barra, que, por sua vez, acarretam fissuras internas inclinadas.

Fissuras perpendiculares ao eixo da peça se desenvolvem se a tensão no concreto excede a resistência à tração,  $f_{ct}$ , não somente no entorno da barra de aço, mas ao longo da região tracionada da seção transversal. Basicamente, estas fissuras são devidas à tensão de tração proveniente da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência. Para que o concreto fissure em um determinado

ponto, a tensão no concreto, neste ponto, deve ser igual à resistência à tração do concreto,  $f_t$ , fazendo com que, conseqüentemente, a deformação de fissuração do concreto,  $\varepsilon_{ct}$ , seja atingida. Assim, o estudo do fenômeno da fissuração deve ser baseado na análise da distribuição das deformações ao longo da peça de concreto armado, pois sempre que a deformação no concreto for igual a  $\varepsilon_{ct}$  uma nova fissura se formará.

Devido à formação da fissura, a tensão de tração no concreto imediatamente adjacente à fissura deve cair à zero. Novas distribuições de tensão e deformação no concreto e no aço vão acontecer após a fissuração. Se a carga é incrementada além daquela que causou a primeira geração de fissuras, novas fissuras poderão se formar, até que uma configuração final seja estabelecida.

Um trecho de uma peça fissurada está representada na Figura 1. As equações diferenciais de equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações para a peça, ver Figura 1, são dadas (FIB – Bulletin 10 - 2000), respectivamente, por

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = -\tau(s)\Sigma_0 \quad (1)$$

$$\varepsilon_s - \varepsilon_c = -\frac{ds}{dx} = -s' \quad (2)$$

sendo:  $\sigma_s = \hat{\sigma}_s[\varepsilon_s(x)]$  a tensão no aço;  $\tau = \hat{\tau}[s(x)]$  a tensão de aderência como função do escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente ( $s(x)$ );  $A_s$  a área da seção transversal da barra de aço;  $\Sigma_0$  o perímetro da seção transversal da armadura;  $\varepsilon_s$  a deformação da barra de aço;  $\varepsilon_c$  a deformação do concreto adjacente à interface aço/concreto.

A transferência de tensão entre o concreto e a armadura, pode ser expressa por

$$A_c \frac{d\sigma_{cm}}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (3)$$

onde  $A_c$  é área de concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão, delimitada por  $r$  (ver figura 1) e  $\sigma_{cm}$  é a tensão média no concreto na área  $A_c$ .

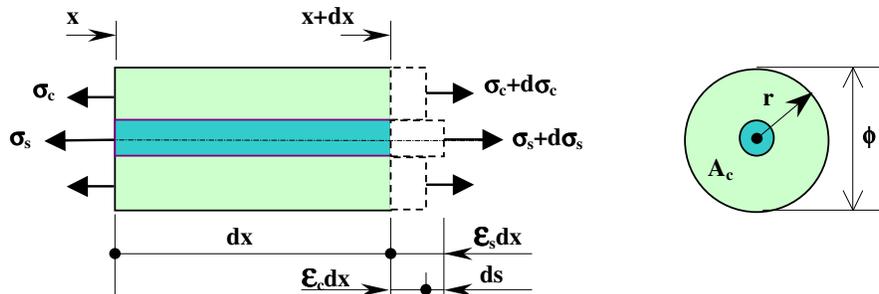


Figura 1: Tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente.

O tamanho desta área de concreto efetivamente envolvida na transferência de tensão, assim como a distribuição de tensões ao longo da mesma, ainda é um tema em discussão. Contudo, pode-se determinar a relação entre a tensão média  $\sigma_{cm}$  e a máxima tensão no concreto (Edwards e Picard, 1972), que acontece

na camada mais próxima da barra, de acordo com

$$\Psi = \frac{\int_{A_c} \sigma_c(r) dA_c}{A_c \sigma_{cm}} \quad (4)$$

Considerando que  $\psi$  não varie ao longo da barra, isto é, seja independente de  $x$ , a equação 3 pode ser reescrita como segue

$$\Psi A_c \frac{d\sigma_c}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (5)$$

O problema que se está querendo resolver, equação 2, não pode ser resolvido de forma explícita para todas as situações. Para os casos que não existe solução explícita, o problema deve ser resolvido através de um processo iterativo, chegando-se a determinadas situações para as quais não existe solução. Assim, é recomendável que se faça uma avaliação qualitativa prévia da possível distribuição de deformações e escorregamento relativo ao longo do elemento, antes de tentar resolver o problema. Em particular, a existência de um ponto ou região onde o escorregamento  $s$  e sua derivada são nulos ( $s = s' = 0$ ), permite o uso de uma expressão explícita na solução do problema, já que nesta região as deformações no aço e no concreto apresentam o mesmo valor. Assim, fazendo esta avaliação prévia, é possível saber qual função ou conjunto de funções que deve ser utilizado em cada situação.

Considerando um trecho da peça entre duas fissuras consecutivas, de comprimento  $L$ , ver Figura 2, dois comportamentos são possíveis, diretamente relacionados com o valor da carga externa e o comprimento da peça:

- a) comportamento de peça longa, Figura 2(a): caracterizado pela existência de uma região onde não existe escorregamento relativo entre o aço e o concreto adjacente ( $s = 0$  no segmento  $R S$ ), e onde os dois materiais possuem a mesma deformação ( $\epsilon_s = \epsilon_c$ );
- b) comportamento de peça curta, Figura 2(b): caracterizado pelo fato de o aço e o concreto apresentarem deformações diferentes ( $\epsilon_s > \epsilon_c$ ) ao longo de todo o comprimento, e o escorregamento relativo entre os materiais é zero apenas no centro do trecho devido à simetria ( $s = 0$  somente em  $S$ ).

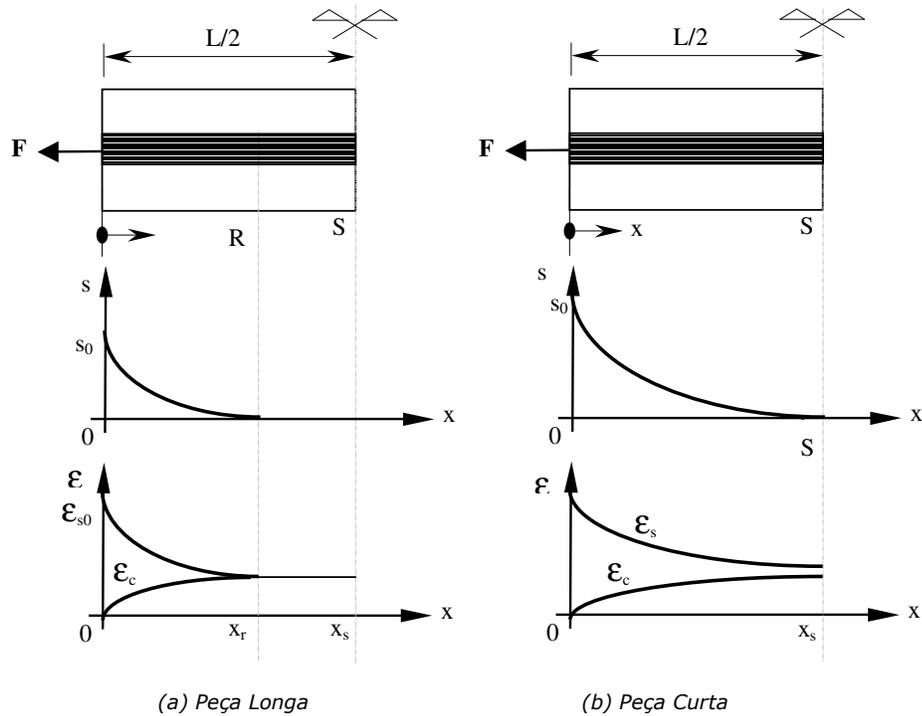


Figura 2: Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço.

Analisando-se a fissuração progressiva de um trecho entre fissuras adjacentes, inicialmente não fissurado, verifica-se que para valores muito baixos de carga e, conseqüentemente, de deformação na extremidade fissurada, o escorregamento relativo se anula antes do eixo de simetria. O trecho ainda não fissurou, e  $\epsilon_{cR} < \epsilon_{ct}$ , sendo  $\epsilon_{cR}$  o valor de  $\epsilon_c$  no ponto R da Figura 2(a) com  $s = s' = 0$ . Também neste ponto tem-se  $\epsilon_c = \epsilon_{cmax}$ .

Qualquer incremento de carga desloca o ponto R em direção ao eixo de simetria e  $\epsilon_{cR}$  aumenta, podendo produzir duas respostas diferentes na peça:

pode ocorrer que a deformação no concreto alcance o valor de fissuração no ponto R com  $x_R \leq L/2$ . Neste caso,  $x_R = x_{Rcrack}$ , sendo  $x_{Rcrack}$  o comprimento requerido para satisfazer a condição de igualdade entre as deformações, dado por

$$x_{Rcrack} = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \left( \frac{\xi+1}{\xi} \right) \epsilon_{ct} \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (6)$$

onde  $\xi = (E_s A_s) / (E_c A_c)$ .  $E_c$  e  $E_s$  são, respectivamente, os módulos de elasticidade do concreto e do aço.  $\gamma$  e  $\alpha$  são parâmetros que levam em consideração o tipo de relação *tensão de aderência x escorregamento* empregada (ver d'Avila, 2003).

As primeiras fissuras primárias se formam e a peça é subdividida em "m" partes, conforme figura 3. O comprimento  $L_p$  de cada uma das partes deve estar entre  $x_{Rcrack}$  e  $2x_{Rcrack}$ , sendo o comprimento médio igual a  $L/m$ . Este caso pode ser definido como a fissuração de uma peça longa;

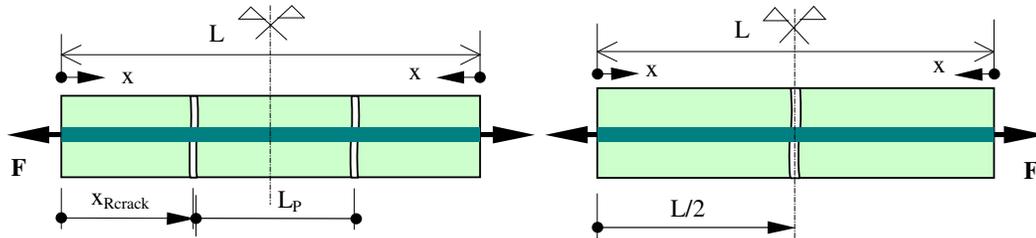


Figura 3: Fissuração em uma peça longa.

Figura 4: Fissuração em uma peça curta.

por outro lado, pode acontecer que o ponto  $R$  alcance o eixo de simetria com a deformação do concreto permanecendo menor que  $\epsilon_{ct}$ . Para fissurar a peça, uma carga ainda maior deve ser aplicada. Com o incremento da carga, a deformação do concreto vai aumentar, mas seu valor máximo,  $\epsilon_{cmax}$ , continuará acontecendo no centro do trecho já que o valor de  $x_R$  não pode ir além de  $L/2$  devido à simetria. Conseqüentemente, a primeira fissura aparecerá, na seção de simetria, quando  $\epsilon_{cmax}$  alcançar o valor  $\epsilon_{ct}$ . Assim, na fissuração a peça é dividida em duas partes iguais, de dimensão  $L/2$ , Figura 4. Este caso é definido como fissuração de uma peça curta.

A condição que garante que a fissuração da peça irá acontecer antes que  $x_R$  alcance o eixo de simetria, ou seja, que a peça funcionará como peça longa é  $x_{Rcrack} \leq L/2$ . Caso contrário, ou seja,  $x_{Rcrack} > L/2$ , a peça funcionará como peça curta desde a primeira geração de fissuras.

As equações 7 e 8 mostram, de forma implícita, o escorregamento  $s$  como função de  $x$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left( \frac{\gamma}{C} \right)^k \frac{s^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad 0 \leq s < \left| \frac{C}{\gamma} \right|^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (7)$$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left( \frac{C}{\gamma} \right)^k \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad \left| \frac{C}{\gamma} \right|^{\frac{1}{1+\alpha}} < s \quad (8)$$

onde  $B$  e  $C$  são constantes de integração que dependem das condições de contorno.

No caso do comportamento de peça longa (figura 2(a)), a constante de integração  $C$  é nula e o escorregamento  $s$  como função de  $x$  pode ser escrito de forma explícita

$$s = \left[ -((1-\alpha)/2)\sqrt{2\gamma}(x-B) \right]^{2/(1-\alpha)} \quad (9)$$

Finalmente, as deformações no aço e no concreto em função do escorregamento são dadas por

$$\epsilon_s = \frac{\xi \epsilon_{s0} + \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (10)$$

$$\epsilon_c = \frac{\xi \epsilon_{s0} - \xi \sqrt{2(\gamma_s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (11)$$

onde  $\epsilon_{s0}$  é a deformação no aço na extremidade fissurada.

Depois da formação da primeira geração de fissuras, uma segunda geração de fissuras pode ocorrer, para um nível de carga ainda maior. O estado de fissuração estabilizada é atingido quando o comprimento de cada parte não é mais suficiente para permitir que a deformação do concreto atinja o valor de fissuração.

A diferença entre os alongamentos do aço e do concreto na metade da peça, é igual ao escorregamento da extremidade carregada,  $s_0$ . A abertura da fissura é dada por  $w = s_{01} + s_{02}$ , sendo  $s_{01}$  e  $s_{02}$  os escorregamentos das extremidades de dois trechos consecutivos.

### 3. O modelo de fissura incorporada

O modelo de fissura incorporada empregado neste trabalho para concreto armado é o modelo apresentado por d'Avila (2003), baseado no modelo proposto por Dvorkin *et al.* (1990) para concreto simples.

Os modelos do tipo incorporado se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos. Os três principais aspectos do modelo utilizado são: (1) a localização de deformações envolve o elemento completo como domínio mínimo; (2) considera-se a localização de deformações na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos, que passa pelo centro do elemento, e pode ter qualquer direção; (3) existem duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do concreto simples: uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação convencional tensão-deformação para o resto do domínio.

O elemento finito usado é o *QMITC* (*Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components*). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional de cinco nós, baseado no método de interpolação mista das componentes tensoriais (Dvorkin e Vassolo, 1989). Este elemento adota uma interpolação para os deslocamentos e uma para as deformações e realiza as duas interpolações em conjunto.

O ponto chave deste modelo está na determinação do equilíbrio interno do elemento: as forças transmitidas através da fissura devem estar em equilíbrio com as forças no volume do elemento, ou seja

$$\mathbf{F}_{ES'} + \underbrace{\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dS}_{\mathbf{F}_{EL}} = \underbrace{\int_{S_L} \mathbf{t} dS}_{\mathbf{F}_{CR}} + \mathbf{F}_S' \quad (12)$$

onde os termos da direita representam o vetor de forças total na fissura e os da esquerda o vetor de forças total no domínio do elemento;  $\mathbf{F}_{ES'}$  são as forças no aço na direção local da fissura no domínio do elemento, ver Figura 5(a);  $\mathbf{F}_S'$  são as forças no aço na fissura, ver Figura 5(b);  $\mathbf{F}_{EL}$  são as forças no concreto na direção local da fissura, no domínio do elemento;  $\mathbf{F}_{CR}$  são as forças no concreto na fissura.  $S_L$  é a superfície da linha de localização (fissura);  $\boldsymbol{\sigma}$  é a tensão no concreto no domínio do elemento; e,  $\mathbf{t}$  é a tensão transmitida através da fissura. A matriz  $\mathbf{P}$  tem a função de selecionar as componentes de tensão no domínio do

elemento que serão transmitidas pela fissura.

A metodologia empregada é, conhecendo-se os valores da força total no domínio do elemento e da força no concreto na fissura, empregar a equação de equilíbrio (12) para determinar o valor da força no aço na fissura,  $F_S'$ . Com este valor determinado, pode-se simular o comportamento do concreto fissurado através do modelo de transferência de tensão por aderência apresentado anteriormente. A seguir, far-se-á uma breve descrição do procedimento iterativo empregado na análise numérica.

A primeira etapa do procedimento é a determinação das forças no domínio do elemento.

Para o concreto, as tensões são calculadas por

$$\sigma = D^e \varepsilon \quad (13)$$

onde  $D^e$  é a matriz constitutiva elástica do material e  $\varepsilon$  é o tensor de deformações no concreto no domínio do elemento, dado por

$$\varepsilon = B (d - \phi R e') = B d_N \quad (14)$$

sendo  $B$  a matriz deformação-deslocamento;  $e'$  o vetor que contém as componentes no sistema local,  $(x', y')$ , da abertura da fissura;  $R$  a matriz de rotação do sistema de coordenadas locais da descontinuidade,  $(x', y')$ , para o sistema de coordenadas do elemento; e,  $d$  o vetor deslocamento nodal. A matriz  $\phi$  é constituída por submatrizes  $\phi_i$ , que são dadas por  $\phi_i = \mathbf{0}$  em  $V_1$  e  $\phi_i = \mathbf{I}$  em  $V_2$ , sendo  $V_1$  e  $V_2$  os dois volumes nos quais o elemento é dividido após a abertura da fissura.  $d_N = d - \phi R e'$  é o deslocamento associado às deformações, já descontado a abertura da fissura.

O modelo implementado para representar a armadura (Elwi e Hrudey, 1989), está baseado no fato que a armadura resiste apenas a tensões axiais em sua direção longitudinal, e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual ela está localizada. Desta forma, os deslocamentos e deformações ao longo da barra, são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos adjacentes de concreto. Assim, a tensão no aço no domínio do elemento,  $\sigma_{ES}$ , é determinada considerando-se um comportamento elasto-plástico perfeito para o material.

Conhecidas as tensões, as forças do aço e do concreto, no domínio do elemento, e nas direções locais da fissura  $(x', y')$ , são dadas, respectivamente, por

$$F_{ES}' = (\sigma_{ES} A_s) R^{-1} \quad (15)$$

$$F_{ES}' = (\sigma_{ES} A_s) R^{-1} \quad (16)$$

Salienta-se aqui que, considerando que as barras de armadura somente contribuem com forças na direção de seus eixos ( $F_{ES}(1)$  para a barra longitudinal e  $F_{ES}(2)$  para o estribo), as forças do aço no domínio do elemento devem ser rotacionadas para as direções locais,  $F_{ES}'$ , como mostra a Figura 5(a).  $A_s(1)$  e  $A_s(2)$  são, respectivamente, as áreas da armadura longitudinal e dos estribos.

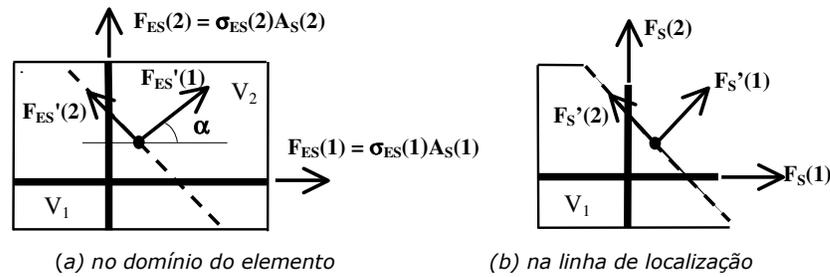


Figura 5: Forças na armadura.

A próxima etapa do procedimento é determinação da tensão no concreto transmitida na linha de localização, definida por

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (17)$$

onde  $\mathbf{D}^{cr}$  é a matriz constitutiva da zona fissurada. A força do concreto na linha de localização,  $\mathbf{F}_{CR}$ , pode então ser determinada e, finalmente, as forças no aço na fissura,  $\mathbf{F}_S'$ , podem ser calculadas pela equação 12.

A deformação no aço na fissura é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s0} = (1/E_s) \mathbf{F}_S \mathbf{A}_s^{-1} \quad (18)$$

com  $\mathbf{F}_S = \mathbf{R} \mathbf{F}_S'$  (ver Figura 5(b)).

Com o valor da deformação do aço na fissura determinado, pode-se modelar o comportamento do concreto armado fissurado empregando o modelo de transferência de tensão por aderência, apresentado anteriormente. Desta forma, finalmente, consegue-se calcular o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente,  $s_0$ , utilizando a equação 9 ou as equações 7 e 8, conforme o caso de peça longa ou curta.

Assim, pode-se determinar, o espaçamento entre fissuras,  $L_p$  (ver Figuras 3 e 4) e a quantidade de fissuras por elemento

$$nf = L_{ele} / dls \quad (19)$$

onde  $L_{ele}$  é o comprimento do elemento normal à linha de localização.

O valor da abertura de cada fissura, usado na equação 18, e o valor total da abertura da fissura por elemento, usado na equação 15, são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{Re}' = 2s_0 \quad (20)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{Re}' nf \quad (21)$$

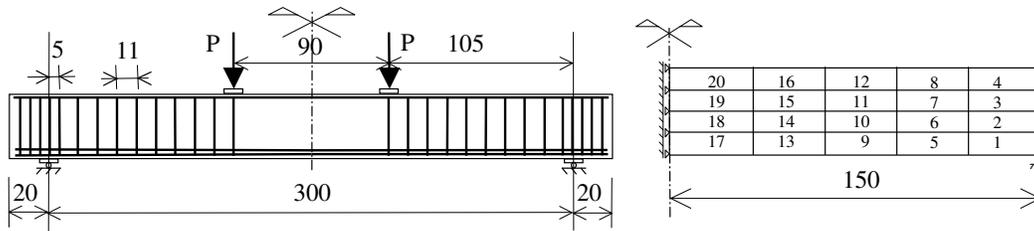
Outro aspecto importante do modelo empregado, é que o processo exposto acima deve ser feito somente pelos elementos que possuem barras de armadura interceptadas pela linha de localização. Para os elementos sem barras de aço atravessando a linha de localização, o valor da abertura da fissura é determinado por uma variação linear em relação ao elemento com armadura próximo.

## 4. Resultados

A seguir, serão apresentados os resultados numéricos obtidos com o modelo apresentado neste trabalho. Inicialmente, para comprovar a eficácia da metodologia empregada, alguns resultados numéricos são comparados com resultados experimentais. Após, é feito um estudo paramétrico sobre a influência de determinadas variáveis sobre o comportamento global da estrutura.

### 4.1. Comparação com resultados experimentais

Para comprovar a eficácia da metodologia apresentada, os resultados numéricos são comparados com resultados experimentais obtidos por Leonhardt e Walther (1962). É analisada uma viga simétrica, simplesmente apoiada, com seção transversal retangular de  $30 \times 35 \text{ cm}^2$ , carregada verticalmente por duas cargas concentradas. O detalhamento da viga é mostrado na Figura 6(a).



(a) Características geométricas

(b) Discretização da malha

Figura 6: A viga analisada.

A armadura longitudinal inferior é composta por quatro barras de 20mm de diâmetro (duas em cada camada), com tensão de escoamento,  $f_y = 42,8 \text{ kN/cm}^2$ , e a armadura longitudinal superior consiste de duas barras de 8mm de diâmetro, com tensão de escoamento,  $f_y = 46,5 \text{ kN/cm}^2$ . Os estribos têm diâmetro de 6mm e tensão de escoamento,  $f_y = 32,0 \text{ kN/cm}^2$ . As propriedades mecânicas do concreto são:  $f_t = 0,233 \text{ kN/cm}^2$ ;  $f_c = 2,42 \text{ kN/cm}^2$ ;  $E_c = 3400 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\nu = 0.2$  e  $G_f = 0,000487 \text{ kN/cm}$ . Para o concreto na linha de localização é empregada uma lei de amolecimento linear. Empregou-se uma malha de 20 elementos QMITC, ver Figura 6(b), na análise numérica. Como o problema tem simetria, analisou-se somente a metade da peça.

Na Figura 7, a evolução da flecha ao longo do carregamento é mostrada. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados numérico e experimental.

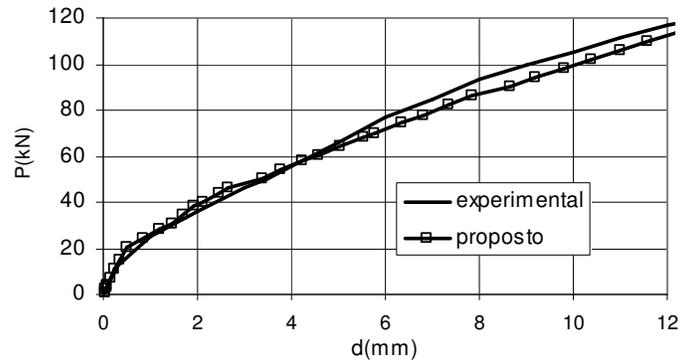


Figura 7: Evolução da flecha com o carregamento.

Nas Figuras 8(a) e 8(b) são comparados resultados obtidos através do modelo proposto e experimentalmente, para os valores de abertura de fissuras, na região compreendida entre o apoio e a carga concentrada.

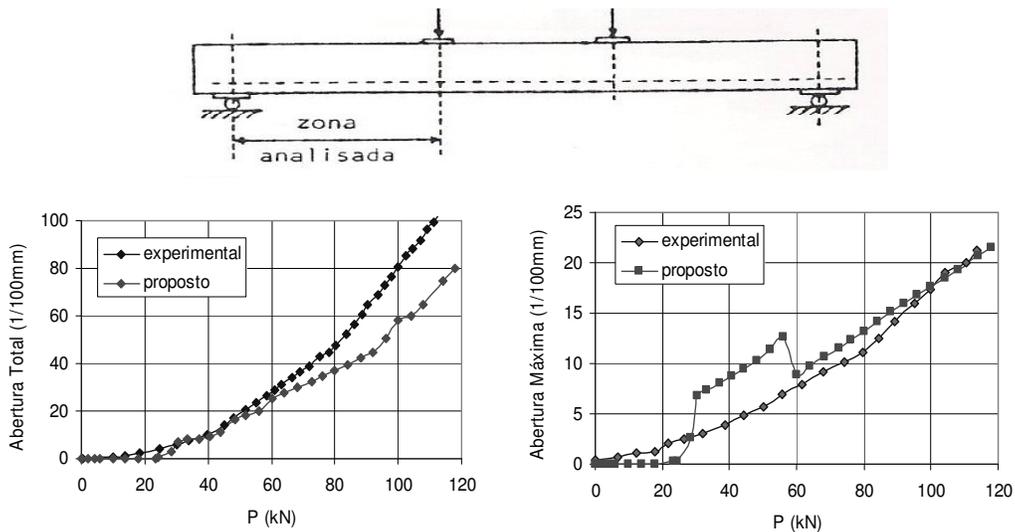


Figura 8: a) Abertura total das fissuras

b) Abertura máxima de fissura

Na Figura 8(a), os valores correspondem as aberturas totais de fissuras (somatório de todas as aberturas de fissura), enquanto que na Figura 8(b), analisam-se os valores da máxima abertura de fissura. Os valores correspondem a aberturas de fissuras na altura da armadura tracionada. Em ambas figuras, observa-se um bom acordo com resultados experimentais. Há uma discrepância inicial na Figura 8(b), pois para estes níveis de carga, o número de fissuras por elemento é menor que um.

#### 4.2. Análise paramétrica

A seguir, apresenta-se um estudo paramétrico sobre a influência de determinadas variáveis, sobre a resposta global da estrutura. O objetivo é analisar parâmetros que influenciem a transferência de tensão por aderência entre o concreto e o aço. Os parâmetros investigados são:

- a) o parâmetro  $\psi$ , que dá a variação das tensões média na camada de concreto envolvida na transferência de tensão, ver equação 4.
- b) a quantidade de barras de aço que compõem a armadura longitudinal tracionada.

A metodologia empregada é a seguinte: manter constante os parâmetros usados na análise anterior, do item 4.1, exceto o parâmetro que está sendo investigado.

a) Parâmetro  $\psi$

O primeiro parâmetro investigado é o parâmetro  $\psi$ , dado pela equação 4. Este parâmetro representa a variação de tensão no concreto em torno das barras da armadura. Na simulação numérica apresentada no item 4.1, o valor adotado foi  $\psi = 1,00$ , ou seja, considerou-se que a tensão no concreto é constante e igual a média ao longo desta camada. A seguir, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica adotando-se para valores do parâmetro: 1,00; 0,75; e, 0,40.

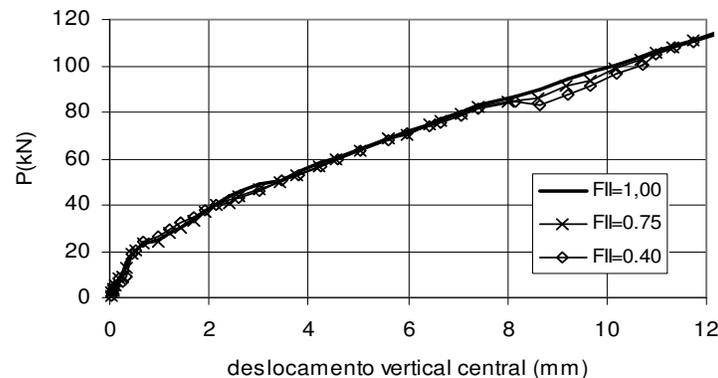


Figura 9: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central.

Os diagramas *carga aplicada x deslocamento vertical do nó central*, obtidos na análise numérica com os três valores adotados para o parâmetro  $\psi$ , estão representados na Figura 9. Pode-se constatar, que os resultados obtidos não são significativamente modificados e, também, que a carga máxima atingida não é alterada pelo parâmetro  $\psi$ .

A variação da tensão na armadura ao longo do carregamento está representada na figura 10. Foram plotados os valores de tensão no aço na fissura do elemento 17 até a carga  $P = 60 \text{ kN}$  (após este valor as curvas são coincidentes).

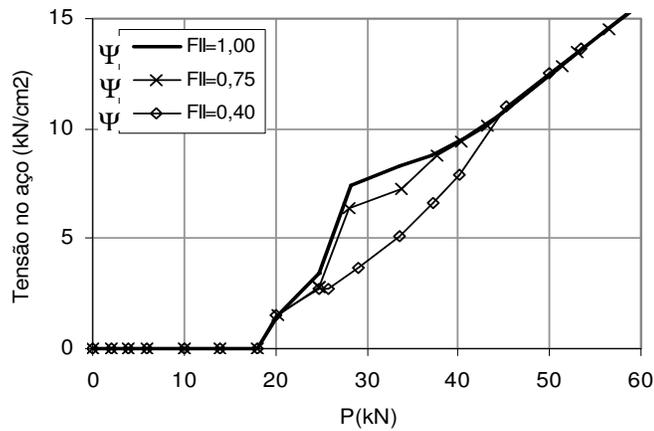


Figura 10: Tensão no aço na fissura x carga aplicada – elemento 17.

Na Figura 11(a), está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissuras, do elemento 17, ao longo do carregamento. Na Figura 11(b), está desenhada a evolução da abertura total das fissuras no mesmo elemento (número de fissuras x abertura de cada fissura), até a carga  $P = 60 \text{ kN}$  (após este valor as curvas são coincidentes).

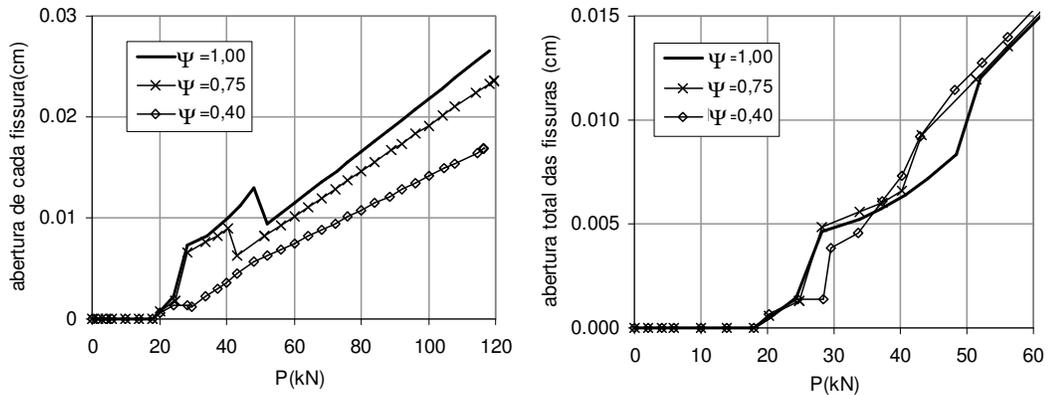


Figura 11: a) Abertura de uma fissura

b) Abertura total de fissuras.

Observa-se na Figura 11(a), uma diminuição da abertura da fissura no momento da formação de uma nova geração de fissuras, porém a abertura total das fissuras (Figura 11(b)), permanece sempre crescente com a carga. Da Figura 11(a), pode-se explicar a diferença de tensões observada na Figura 10: para abertura de fissuras menores ( $\psi$  decrescente), as tensões no aço na fissura são também menores.

A evolução do número total de fissuras, para o elemento 17, ao longo do carregamento, está graficada na Figura 12, indicando que uma variação maior de tensões na área de concreto envolvida na transferência de tensão ( $\psi$  decrescente) ocasiona uma quantidade maior de fissuras.

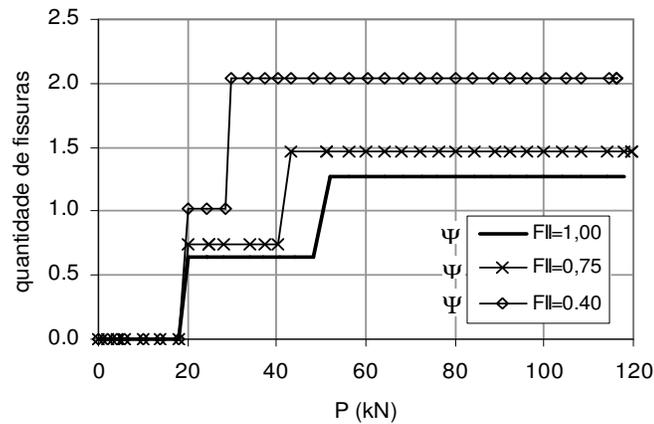


Figura 12: Variação do número de fissuras no elemento 17.

Na Figura 13 mostra-se a curva *tensão transmitida na fissura x carga aplicada* para o elemento 17. Verifica-se que quanto menor o parâmetro  $\psi$  maior é o intervalo de carga no qual é transmitida tensão através da fissura.

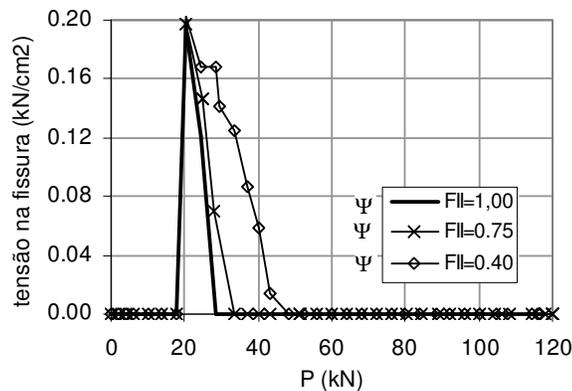


Figura 13: Curva tensão transmitida na fissura x carga aplicada – elemento 17.

Tabela 1: Evolução da fissuração.

$\psi$	1ª geração		2ª geração	
	P (kN)	nº de fissuras	P (kN)	nº de fissuras
1,00	19	0,63	48	1,27
0,75	19	0,73	40	1,46
0,40	19	1,01	28	2,03

A formação da primeira geração de fissuras acontece para o mesmo nível de carga, 19kN, para os três valores do parâmetro  $\psi$  considerados. Na Tabela 1, encontra-se a evolução da fissuração para os valores do parâmetro  $\psi$  considerados.

b) Número de barras da armadura

O segundo parâmetro investigado é a quantidade de barras da armadura longitudinal tracionada inferior. Foram analisadas duas configurações para cada uma das duas camadas, salientando-se que a área total de aço é sempre a mesma e igual a  $6,3 \text{ cm}^2$ :

- uma barra com área de  $6,3 \text{ cm}^2$  e diâmetro de 2,8;
- duas barras com área de  $3,15 \text{ cm}^2$  por barra e diâmetro de 2,0 cm.

Os diagramas *carga aplicada x deslocamento vertical do nó central* estão na Figura 14.

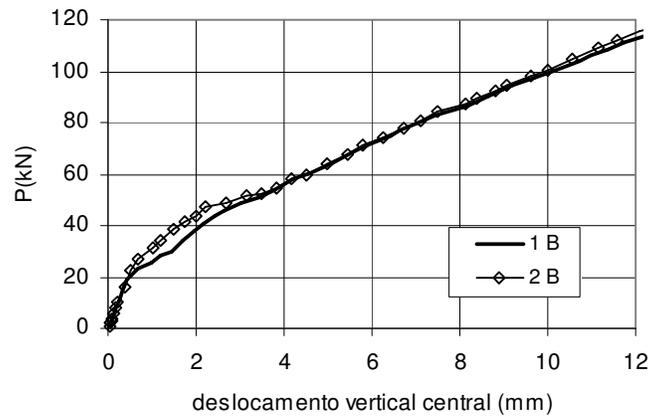


Figura 14: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central.

Verifica-se que existe diferença entre os valores obtidos somente no trecho entre a primeira,  $P=19 \text{ kN}$  e segunda,  $P=48 \text{ kN}$ , gerações de fissura. Depois que a configuração final das fissuras foi estabelecida, os resultados são praticamente coincidentes.

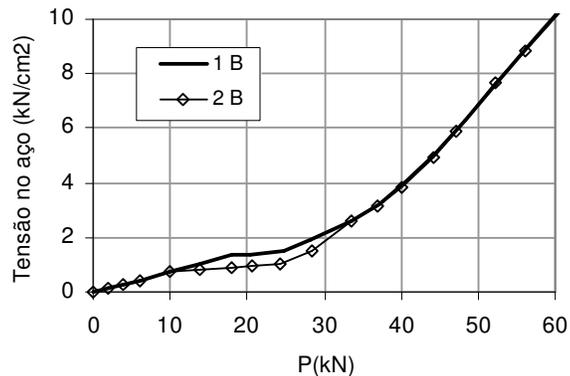


Figura 15: Tensão média no aço x carga aplicada - elemento 17.

Na Figura 15, está representada a variação da tensão média na armadura do trecho entre fissuras, ao longo do carregamento, para o elemento 17. Foram plotados apenas valores até a carga  $P=60 \text{ kN}$ , já que as curvas após esta carga são coincidentes.

Na Figura 16(a), está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissuras, do elemento 17, ao longo do carregamento. Na Figura 16(b), está desenhada a evolução da abertura total das fissuras do elemento 17 (número de fissuras x abertura de cada fissura), até a carga  $P = 60 \text{ kN}$  (após este valor as curvas são coincidentes).

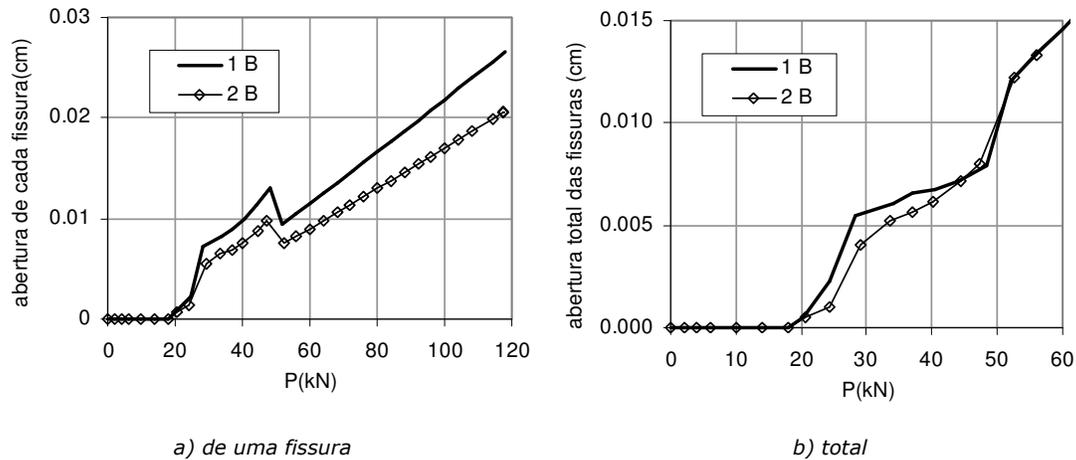


Figura 16: Abertura da fissura – elemento 17.

A evolução do número total de fissuras do elemento 17, ao longo do carregamento, está graficada na Figura 17. A formação da primeira e da segunda geração de fissuras acontece para o mesmo nível de carga, 15kN e 48kN respectivamente, para as duas configurações de armadura consideradas.

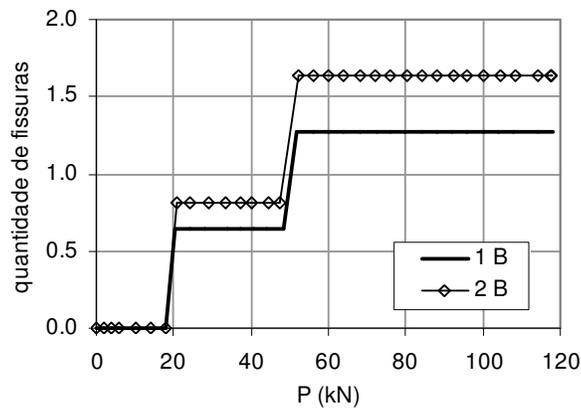


Figura 17: Variação do número de fissuras por elemento.

Na Figura 18, mostra-se a curva *tensão transmitida na fissura x carga aplicada*. Verifica-se que quanto maior o número de barras (conseqüentemente menor o diâmetro de cada barra de aço e menor a abertura de cada fissura) maior é o intervalo de carga no qual é transmitida tensão através da fissura.

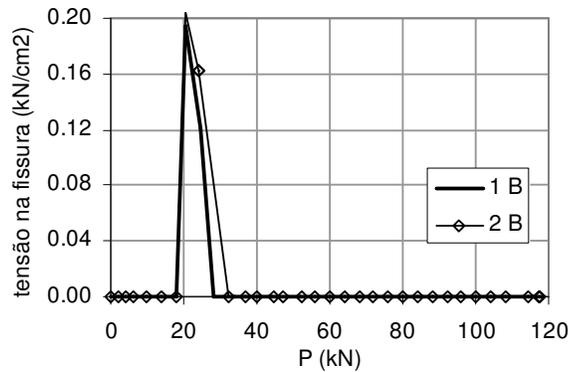


Figura 18: Curva tensão transmitida na fissura x carga aplicada.

## 5. Conclusão

Da análise dos resultados mostrados no item 4.1 (comparação com resultados experimentais), pode-se concluir que o modelo apresentado neste trabalho é capaz de representar corretamente o comportamento pós-fissuração de vigas fletidas de concreto armado. O modelo numérico conseguiu simular de forma bastante satisfatória não só o comportamento global da viga, diagrama da Figura 7, como também a evolução da abertura das fissuras, Figura 8.

Em relação ao estudo paramétrico feito no item 4.2, também é possível chegar a algumas conclusões interessantes.

Pode-se constatar que o parâmetro  $\psi$  influencia na formação das fissuras, alterando tanto o número de fissuras, como o nível de carga que causa a formação da segunda geração de fissuras. À medida que o valor de  $\psi$  diminui, aumenta a quantidade de fissuras e, além disso, menor é a carga para a formação de segunda geração de fissuras e, maior é o intervalo de carga no qual é transmitida tensão através das mesmas. No entanto, o comportamento global da peça não é significativamente alterado.

A variação do número de barras que compõem a armadura altera o processo de formação e desenvolvimento das fissuras, o que está de acordo com as observações já constatadas na prática. A utilização de um número maior de barras mais finas acarreta o aumento da superfície de transmissão de tensão entre o concreto e o aço, fazendo com que se forme um número maior de fissuras com abertura pequena. O fato de cada fissura ter abertura pequena proporciona transferência de tensão através das mesmas, o que faz com que esta configuração apresente resultados mais rígidos que as configurações com menor número de barras (ver Figura 16). Salienta-se, contudo, que após a configuração final das fissuras ser atingida,  $P = 48 \text{ kN}$ , e as fissuras não transmitirem mais tensão,  $P = 33 \text{ kN}$ , as respostas obtidas para todas as configurações são iguais.

## 6. Referências

BAZANT, Z.P. e CEDOLIN, L. 1979. Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **105**: 297-315.

- CHEN, J. e YANG, Z.J. 2005. Finite Element Modelling of Multiple Cohesive Discrete Crack Propagation in Reinforced Concrete Beams. *Engineering Fracture Mechanics*, **72**(14): 2280-2297.
- D'ÁVILA, V.M.R. 2003. *Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos*. Porto Alegre, RS. Tese de doutorado. UFRGS, 259 p.
- DOMINGUEZ, N.; BRANCHERIE, D.; IBRAHIMBEGOVIĆ, A. e DAVENNE, L. 2004. Prediction of Crack Pattern Distribution in Reinforced Concrete by Coupling a Strong Discontinuity Model of Concrete Cracking and a Bond-slip of Reinforced Model. *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, **22**(5-6): 558-582.
- DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M. e GIOIA, G. 1990. Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distorsions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**:541-564.
- DVORKIN, E.N. e ASSANELLI, A.P. 1991. 2D Finite-Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines - The Analysis of Fracture in Frictional Materials, *Comput Method Appl Mec*, **90** (1-3): 829-844.
- DVORKIN, E. N. e VASSOLO, S. 1989. A Quadrilateral 2-D Finite Element Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components. *Engineering Computations*, **6**:217-224.
- EDWARDS, A.D. e PICARD, A. 1972. Theory of Cracking in Concrete Members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **98**:2687-2700.
- ELWI, A.E. e HRUDREY, M. 1989. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **115**(4):740-754.
- FIB – BULLETIN 10, 2000. Bond of Reinforcement in concrete. Bulletin d'Information de la Federation Internationale du Beton, Lausanne, Switzerland.
- GROOTENBOER, H.J.; LEIJTEN, S.F.C.H. e BLAAUWENDRAD, J. 1981. Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plane Stress. *Heron*, **26**(1C), Delft.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M. e PETERSON, P.E. 1976. Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. *Cement and Concrete Research*, **6**:773-782.
- INGRAFFEA, A.R.; GERSTLE, W.H. e GERGELY, P. 1984. Fracture Mechanics of Bond in Reinforced Concrete. *Journal of Structural Engineering*, **110**(4):871-890.
- NGO, D. e SCORDELIS, A.C. 1967. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. *ACI Structural Journal*, **64**(3):152-163.
- LEONHARDT, F. e WALTHER, R. 1962. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau, *Beton- und Stahlbetonbau*, **57**(7):161-173.
- LU, X.Z.; TENG, J.G. e YE, L.P. 2007. Intermediate Crack Debonding in FRP-Strengthened RC Beams: FE Analysis and Strength Model. *Journal of Composites for Construction*, **11**(2):161-174.

- OLIVER, J.A. 1989. Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**:461-474.
- ORTIZ, M.; LEROY, Y. e NEEDLEMAN, A. 1987. A Finite Element Method for Localized Failure Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **61**:189-214.
- OTTOSEN, N.S. 1977. A Failure Criterion for Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **103**(EM4):527-535.
- OTTOSEN, N.S. 1979. Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **105**(EM1):127-142.
- RASHID, Y.R. 1968. Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels. *Nuclear Engineering and Design*, **7**:334-344.
- RUSSO, G.; ZINGONE, G. e ROMANO, F. 1990. Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforcing Bars in R. C. Joints. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **116**(2):336-355.
- RUSSO, G. e ROMANO, F. 1992. Cracking Response of RC Members Subjected to Uniaxial Tension. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **118** (5):1172-1190.
- TIJSSENS, M.G.A.; SLUYS, B.L.J. e VAN DER GIESSEN, E. 2000. Numerical Simulation of Quasi-brittle Fracture Using Damaging Cohesive Surface. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **19**:761-779.

Submissão: 08/05/2007  
Aceite: 26/06/2007