SOBRE LA ADQUISICIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS. KANT, LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA

DOI: https://doi.org/10.4013/con.2024.203.07

Luis A. Canela Morales

Doutor em Filosofía pelo Centro Interdisciplinario de Investigación en Humanidades pela Universidad Autónoma del Estado de Morelos

lcanelamorales@gmail.com

https://orcid.org/0000000237405234

RESUMEN:

En perspectiva kantiana, la posibilidad del conocimiento surge de la conjunción o unidad sintética de la espontaneidad del entendimiento (categorías) con las formas *a priori* de la sensibilidad. La tarea es entender cómo se efectúa esa conjunción o unidad sintética analizando cada una de sus condiciones por separado y en su conjunto. En la *Crítica de la razón pura*, específicamente en el apartado "Del esquematismo de los conceptos puros del entendimiento" (A 137–147/B 176–187) se muestra este mecanismo. Teniendo en mente esta discusión, este trabajo tiene los siguientes objetivos: en primer lugar, presentar la problemática del esquematismo trascendental; en segundo lugar, describir cómo ocurre la construcción esquemática de los conceptos geométricos y, finalmente, especificar el lugar que ocupa el álgebra en la filosofía kantiana de las matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

Kant. Esquematismo. Álgebra. Aritmética. Geometría.

ON THE ACQUISITION OF MATHEMATICAL CONCEPTS. KANT, GEOMETRY, AND ALGEBRA

ABSTRACT:

In the Kantian perspective, the possibility of knowledge arises from the conjunction or synthetic unity of the spontaneity of understanding (categories) with the a priori form of sensibility. The task is to understand how this conjunction or synthetic unity is accomplished by analyzing each of its conditions separately and as a whole. In the *Critique of Pure Reason*, specifically in the section "On the Schematism of Pure Concepts of the Understanding" (A 137-147 / B 176-187), this mechanism is demonstrated. With this in mind, this work has the following aims: first, to present the problematics of transcendental schematism; second, to describe the schematic construction of geometric concepts, and finally, to specify the position of algebra in Kantian philosophy of mathematics.

KEYWORDS:

Kant. Schematism. Algebra. Arithmetic. Geometry.

1 Introducción

En perspectiva kantiana, la posibilidad del conocimiento surge de la conjunción o unidad sintética de la espontaneidad del entendimiento (categorías) con las formas *a priori* de la sensibilidad. La tarea es, precisamente, entender o comprender cómo se efectúa esa conjunción o unidad sintética analizando cada una de sus condiciones por separado y en su conjunto, es decir, "[…] mostrar cómo se engranan las diversas formas fundamentales del conocimiento, la sensación y la intuición pura, las categorías del entendimiento puro y las ideas de la razón pura, y cómo, en su interrelación, determinan la configuración teórica de la realidad" (PELÁEZ CEDRÉS, 2007, p. 212). En la *Crítica de la razón pura*, específicamente en el apartado "Del esquematismo de los conceptos puros del entendimiento" (A 137–147/B 176–187)[1] se muestra, precisamente, este mecanismo junto con cada una de sus condiciones. En efecto, en el *Schematismuskapitel* Kant profundiza en la *naturaleza* y en la *aplicación* (*Anwendung*) de las categorías en la esfera de la sensibilidad. El problema que ahí se aborda se presenta de la siguiente manera: ¿bajo qué condiciones es posible la (*necesaria*) aplicación de las categorías a la multiplicidad empírica? El asunto no es sencillo, pues por razones de heterogeneidad[2] entre los términos antes mencionados, esto es, entre las categorías y la multiplicidad empírica, la aplicación parece requerir de un puente. La cuestión de fondo reside en la

[1] Remitiré a la *Crítica de la razón pura* (*Kritik der reinen Vernunft*) siempre con las siglas *KrV* seguida de la paginación de la edición original (con "A" hago referencia a la primera edición (1781) y con "B" a la segunda edición de 1787). No obstante, cito esta obra de acuerdo con la traducción de M. Caimi (Kant, 2009). También se hará referencia a otras obras kantianas incluidas en *Kant's Gesammelte Schriften*, edición de la Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlín, 1902 y ss. Se hará referencia a esta edición, como ya es usual, con la abreviatura "AA" (Akademie-Ausgabe) seguida del número de tomo (en romanos) y de página (en arábigos).

[2] Tanto la *heterogeneidad* como la *homogeneidad* deben entenderse como el resultado de la unidad del tipo de las síntesis que articulan contenidos dados y contenidos pensados.

posibilidad de *concordancia* entre los conceptos y los objetos a los cuales se dirigen, habida cuenta de que los primeros son condiciones de posibilidad de los segundos. Teniendo en mente esta discusión, este trabajo tiene el siguiente objetivo: en primer lugar, presentar la problemática del esquematismo trascendental; en segundo lugar, describir cómo ocurre la construcción esquemática de los conceptos geométricos y, finalmente, especificar el lugar que ocupa el álgebra en la filosofía kantiana de las matemáticas.

2 Propósito del esquematismo trascendental y la filosofía kantiana de las matemáticas

Así como la "Estética trascendental" Kant se propone investigar si hay elementos a priori relativos a la sensibilidad (y los encuentra en el espacio y el tiempo caracterizados como las formas de la intuición sensible humana), la "Analítica de los conceptos" se propone descomponer la facultad misma del entendimiento para investigar la posibilidad de los conceptos *a priori* o categorías. Justamente sus dos grandes capítulos abordan en conjunto la tarea de determinar qué son esos conceptos *a priori*, cuántos son, cuáles son y qué validez objetiva pueden tener. Así, el primer capítulo se dedica a encontrar las categorías, el segundo se enfoca en la validez objetiva de esas categorías. Es decir, se cuestiona si los conceptos puros del entendimiento surgen *a priori*, si no se derivan de los objetos, si son relevantes para los objetos y, de ser así, cómo interactúan con ellos. Es precisamente en el *Schematismuskapitel* donde se profundiza en la *naturaleza* y en la *aplicación* (*Anwendung*) de las categorías en la esfera de la sensibilidad. Esta discusión, dicho de manera muy general, constituye un paso necesario y justificado en el proyecto de la *Crítica de la razón pura*, pues lo que ahí se discute es, ciertamente, un problema nodal e inevitable que, si bien se "visualiza" en otras secciones de la *Crítica*, no entra en contradicción con ellas. ¿Qué quiero decir con esto? Pudiera parecernos que la teoría del esquematismo está presente desde las reflexiones que aparecen en la Deducción. Pero el asunto, tal como lo veo, es precisar qué tipo de aplicación (*Anwendung*) es de la que se está hablando en cada momento. En todo caso, coincido con Jiménez en asumir que ambos capítulos presentan un núcleo de problemas comunes "dado que comparten la preocupación de fundamentar la validez de nuestras representaciones a partir del concepto de aplicación" (JIMÉNEZ, 2012, p. 32). Nos dice Kant:

> En todas las subsunciones de un objeto bajo un concepto, la representación del primero debe ser *homogénea* con el último; es decir, el concepto debe contener aquello que está representado en el objeto que hay que subsumir bajo él; pues esto, precisamente, significa la expresión: un objeto está contenido *bajo* un concepto (*KrV*, B 176).

Como se puede advertir, en el capítulo del esquematismo no se trata de homogeneizar dos términos absolutamente heterogéneos, como lo son las categorías y la multiplicidad empírica, sino de ilustrar el mecanismo de la homogeneidad consistente en la introducción de un tercero mediador (ARIAS ALBISU, 2009, p. 77-78). De igual manera, no se trata de homogeneizar a la facultad del entendimiento con la facultad de la sensibilidad, sino de hacer énfasis en este mecanismo del *algo en común*. Así, dado que el esquema se comporta como un tercero, resulta comprensible la subsunción y la aplicación de los conceptos a los objetos de la intuición sensible. En otras palabras, para que algo pueda ser *subsumido* bajo un concepto y aplicable a lo diverso de la intuición debe existir una cierta relación de semejanza entre aquél y lo que ha de ser subsumido bajo él.[3] Es importante destacar que, en última instancia, el entendimiento y la sensibilidad permanecen heterogéneos incluso tras la mediación efectuada por el esquema trascendental (JIMÉNEZ, 2016). En suma, la condición de homogeneidad es una condición de posibilidad para la subsunción y no la subsunción misma. Añade Kant:

> Ahora bien, está claro que debe haber un tercero, que debe estar en homogeneidad, por una parte, con la categoría, y por otra parte, con el fenómeno, y que hace posible la aplicación de la primera al último. Esta representación mediadora debe ser pura (sin nada empírico), pero [debe ser], por una parte, intelectual, y por otra parte, sensible. Una [representación] tal es el esquema trascendental (*KrV*, B 177).

El esquema trascendental posibilita la aplicación de la categoría a la intuición sensible. Es intermedio porque es producto de la síntesis de la imaginación (*Einbildungskraft*) trascendental; así, el esquema es “fruto de la espontaneidad del entendimiento y, así, es homogéneo con la categoría y porque surge, a la vez, de la determinación de la forma pura del sentido interno: el tiempo (en consecuencia, también es homogéneo con la intuición sensible)” (COCCO, 2004, p. 16):

> Por eso, los esquemas no son nada más que determinaciones del tiempo, a priori, según reglas, y éstas se refieren, según el orden de las categorías, a la serie del tiempo, al contenido del tiempo, al orden del tiempo, y finalmente al conjunto del tiempo, con respecto a todos los objetos posibles (*KrV*, B 185).

El esquema como determinación trascendental del tiempo (*transzendentale Zeitbestimmung*) o como determinación trascendental temporal no es una determinación del tiempo puro, sino una propiedad/determinación temporal de los objetos empíricos/intuiciones empíricas posibles. En ese sentido, el esquema trascendental determinaría temporalmente la multiplicidad empírica de modo que la misma presente ciertas clases de unidad que serían análogos temporales con el contenido intelectual de las categorías (ARIAS ALBISU, 2005, p. 171 y ss.). Esta regla o procedimiento nos permite subsumir el concepto empírico de, por ejemplo, *dedos en mi mano derech*a bajo el concepto puro de magnitud al contar

[3] “Así, el concepto empírico de un *plato* tiene homogeneidad con el [concepto] puro geométrico de un *círculo*, pues la redondez, que está pensada en el primero, se puede intuir en el último” (*KrV*, B 176). En efecto, Kant no considera que los conceptos mencionados sean homogéneos entre sí por pertenecer al mismo género, sino porque la redondez *pensada en uno* es *intuida en el otro*.

sucesivamente mis dedos en una secuencia paralela a la secuencia de momentos en el tiempo, "unificando" la apariencia de cinco dedos como una sola intuición de "5" (SHABEL, 2003, p. 111). Dice Kant:

> El tiempo, como condición formal de lo múltiple del sentido interno, y por tanto, de la conexión de todas las representaciones, contiene un múltiple a priori en la intuición pura. Ahora bien, una determinación trascendental del tiempo es homogénea con la categoría (que constituye la unidad de ella), en la medida en que es universal y se basa en una regla a priori. Pero por otro lado es homogénea con el fenómeno, en la medida en que el tiempo está contenido en toda representación empírica de lo múltiple. Por eso, una aplicación de la categoría a fenómenos será posible por medio de la determinación trascendental del tiempo, la cual, como el esquema de los conceptos del entendimiento, media en la subsunción de los últimos bajo la primera (*KrV*, B 177-178).

El esquematismo es, pues, el *procedimiento* por el que se sintetiza dicha multiplicidad mediante principios análogos a los principios de las síntesis lógicas de las notas conceptuales. Es un procedimiento formal del entendimiento con los esquemas. En el esquematismo, al efectuar una relación que va de las categorías a las intuiciones, se opera también con cierto cumplimiento o realización (*Erfüllung*) de las mismas. En efecto, la existencia de esta relación de semejanza supone o, mejor dicho, implica la posibilidad de intuir en la sensibilidad lo pensado en el concepto (ARIAS ALBISU, 2005).

Ahora bien, es verdad que los esquemas son un producto *a priori* de la imaginación trascendental, pero ellos no son ni imágenes ni figuras (*Bild*) particulares. En todo caso, las imágenes y figuras son el resultado empírico de la imaginación. Cito a Kant:

> El esquema, en sí mismo, es siempre sólo un producto de la imaginación; pero en la medida en que la síntesis de esta última no tiene por propósito ninguna intuición singular, sino únicamente la unidad en la determinación de la sensibilidad, el esquema ha de distinguirse de la imagen. Así, cuando pongo cinco puntos uno después del otro, ... esto es una imagen del número cinco (*KrV*, B 179).

En la medida en que la síntesis de la imaginación no tiene por propósito postular intuición singular alguna sino únicamente la unidad en la determinación de la sensibilidad, el esquema ha de distinguirse de la imagen. En el ejemplo que Kant proporciona, los cinco puntos **. . . . .** estos constituyen una imagen o una representación sensible del número cinco, pero no la única, existen otras posibilidades aritméticas y visuales, por ejemplo: - - - - -*; 1+1+1+1+1; 2+2+1; 3+1+1;* | | | | |. Según lo anterior, Kant advierte que tales representaciones particulares nunca podrían ser *comparadas* con el concepto ("cinco") porque ninguna imagen es adecuada a un concepto sensible puro. El esquema excede toda imagen particular.[4]

[4] En realidad, la imagen no podría ser un punto de partida epistémica y ontológicamente legítimo, pues no se puede suponer, ni justificar, que el conocimiento empírico sea ajeno al ámbito de lo puro *a priori*. El propio Kant lo dice: "[…] ¿de dónde iba a sacar la experiencia misma su certeza, si todas las reglas según las cuales ella procede fueran siempre empíricas, y por tanto contingentes?" (*KrV*, B 5).

3 La construcción esquemática de los conceptos geométricos

En el caso de la geometría ocurre algo similar, por ejemplo, con el esquema de un triángulo:

> Jamás imagen alguna de un triángulo sería adecuada al concepto de un triángulo en general […] El esquema del triángulo nunca puede existir en otra parte que en los pensamientos, y significa una regla de la síntesis de la imaginación, con respecto a figuras puras en el espacio (*KrV*, B 180).

En estos casos, el esquema no es sino la regla de construcción dirigida a la producción o construcción de imágenes particulares, esto es, la efectiva realización de la regla de construcción que se ve implicada en la aplicación del concepto a la intuición sensible (*KrV*, B 39). En efecto, dice Kant que no podemos representarnos "línea alguna, por pequeña que sea, sin trazarla en el pensamiento; es decir, [sin] generar poco a poco todas las partes a partir de un punto, [y sin] dibujar, ante todo, esta intuición de tal manera" (*KrV*, B 203). Lo que aquí parece sugerirse es que es necesario establecer una conexión entre la *capacidad de pensar en algo*, que requiere la posesión del concepto de esa cosa, con la construcción[5] simbólica o diagramática o, en su defecto, la mera imaginación visual. Como sugiere Kant "[…] se exige también *hacer sensible* un concepto abstracto, es decir, exponer en la intuición el objeto que le corresponde, porque sin esto, el concepto quedaría (como se suele decir) sin *sentido*, es decir sin significado" (*KrV*, B 299). Analicemos este punto. Kant tiene en claro que la tarea de construir un concepto matemático debe ser idéntica y allende con la labor de representar un elemento del conjunto de ese concepto. En cierto sentido, a través del procedimiento de construcción se pueden pensar ciertos objetos justo porque esas representaciones concretas son constitutivas de esos procedimientos. Así, la diferencia entre la definición y la construcción es que la primera trata con proposiciones analíticas generadas por mero análisis de conceptos y la segunda con proposiciones sintéticas. En la primera, lo que efectivamente se piensa es en el concepto o definición de triángulo, en la segunda, se "sale de él" para ir a propiedades que no residen en ese concepto, pero que sí pertenecen a él (*KrV*, B 744-745). Por ejemplo, en el caso de la proposición "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos", el concepto de *"dos rectos"* no está contenido en el concepto de *triángulo* —como sí lo están los conceptos "tres ángulos" y "tres líneas"—.

---

[5] A juicio de SHABEL (2002), los conceptos matemáticos son construibles a través de un procedimiento que, técnicamente hablando, excluye la necesidad de una *tercera cosa mediadora* que vincule el concepto matemático con su intuición. En el caso del concepto de triángulo, el esquema es el procedimiento para construir una figura cerrada en el plano de tres lados a través de *condiciones universales de construcción*, es decir, la espacialidad que indica que dos lados deben ser más largos que el tercero; la temporalidad necesaria para enumerar tanto el número como la longitud de los lados y el procedimiento que da por resultado una figura cerrada de tres lados. Así, cualquier triángulo construido de esta manera tiene la capacidad de representar universalmente en la medida en que fue construido de conformidad con la regla especificada por el esquema para el concepto de triángulo.

> Lo primero daría por resultado solamente una proposición empírica (mediante la medición de los ángulos de él) que no contendría universalidad alguna, ni aun menos, necesidad; y no se trata [ahora] de [proposiciones] semejantes. El segundo procedimiento es la construcción matemática, y aquí, precisamente, la geométrica, por medio de la cual, en una intuición pura, así como en la empírica, añado lo múltiple que pertenece al esquema de un triángulo en general, y por tanto [pertenece] al concepto de él; por medio de lo cual, ciertamente, deben ser construidas proposiciones sintéticas universales (*KrV*, B 746).

Lo que se afirma aquí es que nuestra capacidad para poseer un concepto matemático depende de nuestra capacidad para representar un referente de ese concepto. La capacidad de pensar una línea depende de la capacidad de trazarla, la capacidad de pensar un círculo depende de la capacidad para representárnoslo. En todos estos casos, la captación inicial de estos contenidos conceptuales está directamente ligada a capacidades representacionales o diagramáticas. Estas últimas no son sólo condición suficientes o meras "ayudas al pensamiento" sino que son también necesarias para la captación segura de ese tipo de conocimiento. Finalmente, hay que comprender que, para Kant, una demostración es una prueba necesariamente válida que descansa en la intuición. "Esto es, sólo en la medida en que se pueden construir conceptos y exponer a priori las intuiciones que les corresponden, podemos asegurar la necesidad de una prueba [...] las construcciones de los conceptos matemáticos proceden mediante el recurso a marcas, diagramas, considerados estos como esquemas, esto es, imágenes que capturan los rasgos universales contenidos en un concepto" (PELÁEZ CEDRÉS, 2023, p. 94)

4 La construcción y simbolización de los conceptos algebraicos

La concepción kantiana del álgebra se presenta en dos oscuros pasajes de la *Crítica*:

> Pero la matemática no construye solamente cantidades (*quanta*), como en la geometría, sino también la mera cantidad (*quantitatem*), como en el álgebra; y allí hace completa abstracción de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado de acuerdo con ese concepto de cantidad. Entonces escoge una cierta notación para todas las construcciones de cantidades en general (números), como para la adición, substracción, etc., extracción de raíz, y luego de haber caracterizado también el concepto universal de las cantidades de acuerdo con las diversas relaciones de éstas, exhibe en la intuición, según ciertas reglas universales, toda operación generada y modificada por la cantidad; allí donde una cantidad ha de ser dividida por otra, pone los caracteres de ambas juntos, según la forma que caracteriza a la división, etc.; y así, por medio de una construcción simbólica, llega tan bien como [llega] la geometría siguiendo una [construcción] ostensiva o geométrica (de los objetos mismos), hasta allí donde el conocimiento discursivo por medio de meros conceptos nunca podría llegar (*KrV* B745).

Y más adelante, señala lo siguiente:

> Por tanto, sólo la matemática contiene demostraciones, porque ella no deduce sus conocimientos a partir de conceptos, sino a partir de la construcción de éstos, es decir, de la intuición, que puede ser dada a priori de manera correspondiente a los conceptos. Incluso

> el procedimiento del álgebra con sus ecuaciones, a partir de las cuales ella, por reducción, produce la verdad juntamente con la prueba, es una construcción, si bien no geométrica, sí empero característica, en la cual, al exponer los signos, se exponen en la intuición los conceptos, principalmente los de la relación de cantidades, y aun sin tomaren consideración lo heurístico, se preservan de errores todos los raciocinios poniendo a la vista cada uno de ellos (*KrV* B 762).

De acuerdo con GORDON BRITTAN (1992, p. 315 y ss.), algunos intérpretes, entre ellos C. D. Broad, Hintikka y Parsons, asumen que las afirmaciones kantianas sobre el álgebra pueden ser identificadas con la aritmética, es decir, que el álgebra es simplemente una *aritmética generalizada*. Al igual que SHABEL (2002), considero que la visión anterior está equivocada. En primer lugar, porque ignoran que Kant tiene en mente la práctica matemática del siglo XVII y XVIII y, en segundo lugar, porque el propio Kant sí presenta una distinción entre ambas disciplinas. Comienzo por el primer punto. Si bien a lo largo del siglo XVI, los avances en el álgebra se habían centrado en su aplicación a problemas numéricos, cabe recordar aquí a François Viète y al propio Descartes, a finales del siglo XVI y principios del XVII, el álgebra aún seguía estrechamente ligada a sus raíces en la aritmética (SUTHERLAND, 2006). En efecto, en el período moderno las matemáticas se describían como la ciencia de la medición o la ciencia de la cantidad o la ciencia que investiga los medios para medir la cantidad. Por ejemplo, Christian Wolff, en su *Mathematisches Lexicon*, afirma que las matemáticas "son una ciencia para medir todas las cosas que permiten ser medidas" (*ist eine Wißenschaft, alles auszumessen, was sich ausmessen last*) (WOLFF, 1716, p. 863). Lo mismo ocurre en su *Auszug aus den Anfangsgründen*,[6] ahí el álgebra es definida como la ciencia que, dadas ciertas magnitudes finitas, permite encontrar otras magnitudes a través de ecuaciones que están en cierta relación con aquellas (1755, p. 698). Leonhard Euler, en sus *Elementos de álgebra*, advierte que "la matemática, en general, es la ciencia de la cantidad; o la ciencia que investiga los medios para medir la cantidad" (1972, p. *xxxiii*).

Según lo estipulado por G. MARTIN (1967, pp. 58-59), Kant impartió lecciones sobre matemáticas durante dieciséis semestres consecutivos, desde el semestre de invierno de 1755/56 hasta el semestre de verano de 1762. En dichas lecciones Kant expresaría un punto de vista similar al anterior. Por ejemplo, en sus lecciones de matemáticas de 1762-1763, transcritas por J. G. Herder —las *Vorlesung Herder*— las matemáticas son definidas como la ciencia de la medida de la magnitud de las cosas (*Die Mathematik ist eine Wißenschaft, die Größen der Dinge auszumessen*) (AA: XXIX, 49). En esas lecciones se distingue entre magnitud (*Größe*), entendida como aquello que puede aumentar o disminuir, unidad de medida de magnitud (*Maas, Maasstab*) y el acto de medir (*Messen*), el que especifica cuántas veces la unidad (*Eins*)

[6] Dicho sea de paso, las lecciones de Kant sobre matemáticas tenían como texto de referencia el *Auszug*.

está contenida dentro de una cosa. “Esta medida puede tomarse directamente mediante una unidad de medida, o indirectamente, mediante inferencias (*Schlüße*) como en el caso de la distancia entre la tierra y la luna” (MORETTO, 2015, p. 422).

Ahí mismo, en las *Vorlesung Herder*, la aritmética es definida como la ciencia de los números (AA: XXIX, 49). Ella se divide en *Mathesis universalis* y *Mathesis specialis*. La primera se divide, a su vez, en cálculo general (*das gemeine Rechnen*) y cálculo superior (*das höhere Rechnen*), que a su vez se divide en cálculo algebraico y análisis (definido como aquello que determina lo desconocido comparándolo con lo conocido) (AA: XXIX, 49). En lo que se conoce como texto B de las *Vorlesung Herder*, también se afirma que la *mathesis universalis*, al medir la magnitud en sí misma se presenta como aritmética si expresa magnitudes a través de números o como álgebra si los representa a través de otros signos (AA: XXIX, 59).

Esta concepción kantiana persiste en la *Investigación acerca de la distinción de los principios fundamentales de la teología natural y la moral* (*Preisschrift*, 1764), donde Kant señala lo siguiente:

> El objeto de la matemática es la magnitud. Y, en la consideración de ésta, la matemática sólo atiende a cuántas veces algo está dado. Siendo este el caso, es obvio que esta ciencia debe basarse en unos pocos y muy claros principios fundamentales de la teoría general de la magnitud (*Grundlehren der allgemeinen Grössenlehre*) (que propiamente hablando es la aritmética general) (KANT, 1992, p. 255).

En la carta a Johann Schultz, del 25 de noviembre de 1788, Kant describe al álgebra como una *aritmética general*:

> La aritmética general (álgebra) es una ciencia de tal modo ampliativa que no cabe nombrar ninguna otra de las ciencias racionales que se le equipare en este respecto. De hecho, las restantes partes de la matemática pura (Mathesis) esperan su crecimiento en gran parte de la ampliación de aquella doctrina universal de la magnitud […] La aritmética no tiene, como es claro, ningún axioma porque no tiene propiamente como objeto algún quantum, es decir, ningún objeto de la intuición como cantidad, sino sólo la cantidad en tanto tal, o sea, considera el concepto de una cosa en general mediante una determinación cuantitativa (KANT, 1999, pp. 283-284).

En otra carta, esta vez a Carl Rheinhold, del 19 de mayo de 1789, Kant sugiere que el álgebra se debe referir a meras magnitudes sin cualidades y que ella, el álgebra, nos permite representar las proporciones entre magnitudes:

> […] el matemático no puede hacer la más mínima afirmación sobre algún objeto sin exhibirlo en la intuición (o, si estamos considerando sólo cantidades sin cualidades, como en el álgebra, exhibir la relación cuantitativa que representa el símbolo) (KANT, 1999, p. 305).

Este último énfasis nos lleva a pensar que el álgebra, según Kant, abstrae las cualidades, pero no sus propiedades puramente cuantitativas, es decir, su carácter de magnitud. Por tanto, el álgebra sí tiene un objeto, a saber, la *quantitas*. En el *Preisschrift*, Kant ya señalaba algo importante:

> Dado que aquí tratamos nuestras proposiciones como conclusiones derivadas inmediatamente de nuestras experiencias, apelo, en primer lugar, en relación con el presente tema, a la aritmética, tanto a la general, que trata de las magnitudes indeterminadas, como aquélla que trata de los números que determina la relación de la magnitud con la unidad. En ambas se postulan en primer lugar, en vez de las cosas mismas, los signos respectivos, con las designaciones especiales de su incremento y disminución, sus relaciones, etc. Luego se opera con estos signos según reglas fáciles y determinadas, mediante sustitución, combinación, resta y muchos tipos de transformación, de modo tal que las cosas significadas se olvidan por completo en el proceso, hasta que, finalmente, se descifra el significado de la derivación simbólica en la conclusión (KANT, 1992, p. 250).

Entendamos todo lo anterior. La noción de cantidad que Kant presenta aquí ya es diferente a la de su época. Kant llama *quanta* a esta nueva caracterización de una magnitud. Siguiendo a SHABEL (2002) y SUTHERLAND (2005), en la *Crítica* Kant distinguía entre un sentido de magnitud relativamente concreto y un sentido de magnitud más abstracto, *quanta* y *quantitas*, respectivamente. Un *quanta* es una magnitud/cantidad "como tal" (*KrV*, B 204),[7] una *quantitas*, por el contrario, responde a la pregunta de qué tan grande es algo,[8] es decir, cuál es su tamaño. "Así, Kant da cabida a una noción de cantidad más concreta y básica que la determinación del tamaño" (SUTHERLAND, 2005, p. 148). En el primer sentido magnitud se refiere a objetos únicamente de forma *cuantitativa* y en el segundo momento la magnitud se refiere a objetos con tamaño y figura. En sus lecciones de metafísica (*Metaphysik Vigilantius*, 1794-1795), Kant regresó a esta distinción:

> Ahora bien, esa determinación de una cosa, a través de la cual se conoce la materia como un quantum, es cantidad o magnitud [...] La cantidad no es más que la determinación de qué tan grande es algo: así algo puede pensarse como quantum, sin dejarse determinar como cantidad o ser determinado por ella [...] A través de la comparación de una cosa consigo misma y sus partes, uno puede conocer claramente que hay un quantum, pero nunca se puede determinar, sin comparación de una cosa con otras cosas, lo que realmente tendría como magnitud o qué tan grande es (KANT, 1997, p. 460).

En cierta medida, Kant sostiene que uno puede conocer que algo es una magnitud [*quanta*] sin referencia a nada más; pero conocer una *quantitas* sí requiere de una relación con algo más. Así, el simple hecho de ser un *quantum* se puede conocer claramente mediante la comparación de una cosa consigo misma. En suma, ser un *quantum* es una propiedad cualitativa de una cosa (SUTHERLAND, 2005). A juicio de Shabel: "por tanto, la magnitud (*quantitas*, tamaño) de una magnitud (*quantum*, tamaño de objeto) se determina considerando el objeto bajo el concepto de "magnitud en general", es decir, cuantificándolo en relación con una unidad elegida" (1998, p. 610). Lo anterior se debe a que la *quantitas* es una determinación

[7] Que Kant define como: "[…] la conciencia de lo homogéneo múltiple en la intuición en general, en la medida en que mediante ella se hace, primeramente, posible la representación de un objeto, es el concepto de una cantidad (*quanti*)" (*KrV*, B 203).

[8] "Pero en lo que respecta a la cantidad (*quantitas*), es decir, a la respuesta a la pregunta: ¿cuán grande es algo?" [...] (*KrV*, B 204).

del tamaño del *quantum* de un objeto. El *quantum* es la característica (comparativamente) concreta del objeto al que pertenece el tamaño, en otras palabras, la *quantitas* es una determinación de un *quantum*. En el apartado del esquematismo, Kant ya había indicado que:

> La imagen pura de todas las cantidades (*quantorum*) ante el sentido externo, es el espacio; pero de todos los objetos de los sentidos en general, el tiempo. Pero el esquema puro de la cantidad (*quantitatis*), como [esquema] de un concepto del entendimiento, es el número, que es una representación que abarca la adición sucesiva de lo uno a lo uno (homogéneos). Por tanto, el número no es otra cosa que la unidad de la síntesis de lo múltiple de una intuición homogénea en general, de modo tal, que produzco el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición (*KrV*, B 182).

La *quantitas* es, pues, la determinación del tamaño de un *quantum* expresado por el número de unidades contenidas en él. Así, un *quantum* se refiere a algo relativamente concreto, algo que es una magnitud, mientras que *quantitas* se refiere a la magnitud de una cosa en un sentido más abstracto. Expliquemos un poco más. Kant caracteriza a la *quantitas* como aquello que responde a la pregunta *¿cuán grande es algo?* Por ejemplo *¿qué tamaño tiene la silla que está frente a mí?*, es equivalente a preguntar *¿cuál es su quantitas?* La respuesta a esto requiere de una unidad de medida y un número que especifique cuántas unidades son equivalentes con lo que se está midiendo. Si seguimos con ejemplo, podría decir que esa silla mide 60cm de alto o 23 pulgadas. Según lo anterior, la *quantitas* de este ejemplo es la cantidad particular abstracta de un *quantum*, es decir, el tamaño de esta (y únicamente esta) silla. Desde luego, una *quantitas* puede ser compartida o tener algo en común por diferentes *quanta*[9] (SUTHERLAND, 2021, p. 79-80). Según lo citado anteriormente, cuando Kant señala que "la matemática no construye solamente cantidades (*quanta*), como en la geometría, sino también la mera cantidad (*quantitatem*), como en el álgebra; y allí hace completa abstracción de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado de acuerdo con ese concepto de cantidad" (*KrV*, B 745), lo que ahí se afirma es que cuando el álgebra se aplica a objetos de la geometría (líneas, triángulos, círculos, etc.,) solo los considera en la medida en que son la "variedad homogénea" que puede combinarse de diversas formas, abstrayendo las propiedades espaciales particulares de los *quanta* geométricos y resolviendo el problema geométrico sin recurrir a *construcciones* geométricas. Pero también dice que el algebrista construye magnitudes según el segundo sentido, es decir, ignorando los aspectos cualitativos del objeto, considerándolos sólo en concordancia con el concepto puro o categoría (*quantitatem*). "Así, según Kant, el algebrista puede construir un objeto matemático en cuanto cantidad únicamente, sin tener en cuenta la forma o la figura" (SHABEL, 1998, p. 610). Mientras que el geómetra construye magnitudes respondiendo a la pregunta cuán grande es, la construcción del algebrista responde a

[9] "Hay ahora varios quanta, pero no varias cantidades, dado que la determinación de la cantidad (*quantitas*) sólo puede ser una" (*Kant*, 1997, p. 460).

cuántas unidades homogéneas hacen el particular tamaño de objeto en abstracción de la construcción del objeto en sí mismo (p. 611). Lo anterior sugiere que, mientras que la *quantitas* de la aritmética se refieren a números particulares, la *quantitas* del álgebra abstrae las propiedades de números particulares, refiriéndose a ellos de forma general.

En suma, el álgebra tiene a las *quantitas* como su objeto de estudio, en tanto propiedades cuantitativas de los *quanta* y de sus relaciones entre ellas. En el caso del empleo del álgebra en la geometría, únicamente se consideran las *quantitas* de los *quanta* geométricos junto con sus relaciones. Si lo anterior es correcto, entonces habría diversos objetos matemáticos en el universo kantiano: "primero, un *quantum*, es decir, una variedad homogénea en la intuición; segundo, la *quantitas* de un *quantum*, es decir, las propiedades cuantitativas de un *quantum*; y tercero, las relaciones entre los *quantitas* de los *quanta*" (SUTHERLAND, 2021, p. 82).

5. Breves conclusiones

Kant distingue entre la construcción esquemática y la empírica. En este sentido, incluye a la aritmética en una teoría general de las matemáticas en tanto ciencia de las magnitudes y su medición. Dicho esto, todo parece indicar que en la obra de Kant el álgebra mantiene cierta independencia de la aritmética. Esta autonomía es fundamental pues permite comprender cómo es que ocurre la manipulación simbólica, que no es sino la sustitución de cosas concretas por signos en abstracto. Efectivamente, la construcción simbólica en el álgebra es una exhibición indirecta de reglas de manipulación de las cantidades abstraídas de sus cualidades correspondientes (magnitud en sentido estricto). En el caso particular del álgebra, los *quanta* y sus *quantitas,* junto con sus propiedades cuantitativas, juega un papel fundamental en lo relativo al conocimiento matemático, al menos tal y como Kant lo explica.

6 Referências

ARIAS ALBISU, M. La doctrina kantiana del esquematismo trascendental, *Areté*¸ XVII, 2, p. 155-182, 2005.

______ Una relación de homogeneidad entre términos heterogéneos. El concepto de homogeneidad en el capítulo del esquematismo de la *Crítica de la razón pura*, *Diánoia.* Revista de Filosofía, liv, 63, p. 71-88, 2009.

______ El esquema trascendental de las categorías de la cantidad como determinación temporal, *Éndoxa*, 27, p. 55-72, 2011.

BRITTAN, G. Algebra and Intuition. *In*: POSY, C. J. (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992, p. 315-339.

CALLANAN, J. J. Kant on the Acquisition of Geometrical Concepts, *Canadian Journal of Philosophy*, 44, 5–6, p. 580–604, 2014.

COCCO, M. I. *El origen del esquematismo en los escritos precríticos de Kant*. Disertación (Tesis doctoral), FFyL-Universidad de Buenos Aires, Argentina, 2004.

DETEL, W. Zur Funktion des Schematismuskapitels in Kants *Kritik der reinen Vernunft*, *Kant-Studien*, 69, p. 17-45, 1979.

EULER, L. *Elements of Algebra*, New York: Springer, 1972.

IRMSCHER, H. D. *Immanuel Kant. Aus der Vorlesungen der Jahre 1762-1764. Aufgrund der Nachschriften J. G. Herders,* Köln: Universitätsverlag, 1964.

JIMÉNEZ RODRÍGUEZ, A. El problema de la modalidad en la *Crítica a la razón pura*, *Bajo Palabra*, (7), pp. 27–36, 2012.

______ 'Gleichartigkeit' y 'Anwendung' en la *Crítica de la razón pura* de Kant, *Daimon*. Revista Internacional de Filosofía, 67, p. 7-21, 2016.

KANT, I., *Kants Gesammelte Schriften*. Hrgs. Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften (antes: Preußischen Akademie der Wissenschaften). Berlin: Walter de Gruyter, 1900 ss. AA, 29 (*Kleinere Vorlesungen und Ergänzungen* I. 1.).

______ *Theoretical philosophy* (*1755-1770*) UK: Cambridge University Press, 1992.

______ *Lectures on Metaphysics*, UK: Cambridge University Press, 1997.

______ *Correspondence*, UK: Cambridge University Press, 1999.

______ *Crítica de la razón pura*, FCE/UNAM/UAM-I, México, 2009.

MARTIN, G. Die mathematischen Vorlesungen Kants, *Kant Studien*, 58, 1, p. 58-62, 1967.

MORETTO, A. Herder's Notes on Kant's Mathematics Course. *In*: CLEWIS, R. R. (Ed.), *Reading Kant's Lectures*. Berlin-Boston: De Gruyter, 2015, p. 418-454.

PELÁEZ CEDRÉS, Á. Matemáticas, unidad sintética y a priori constitutivo, *ARETÉ*, vol. XIX, 2, p. 211-239, 2007.

______ La filosofía de las matemáticas en Kant. *In*: LEYVA, G. (Ed), *Guía Comares de Immanuel Kant*, Granada: Editorial Comares SL, p. 77-95, 2023.

SCAGLIA, L. *Kant´s Notion of a Transcendental Schema. The Constitution of Objective Cognition between Epistemology and Psychology*, Berlin: Peter Lang, 2020.

SHABEL, L. Kant's on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts, *Studies in History and Philosophy of Science*, 29, 4, p. 589-621, 1998.

______ *Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*, New York: Routledge, 2002.

SUTHERLAND, D. Kant on Fundamental Geometrical Relations, *Archiv f. Gesch. d. Philosophie*, 87, p. 117–158, 2005.

______ The Role of Magnitude in Kant’s Critical Philosophy, *Canadian Journal of Philosophy*, 34, 4, p. 411–42, 2004.

______ Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions, *Journal of the History of Philosophy*, 44, 4, p. 533-558, 2006.

______ Kant’s Philosophy of Arithmetic. An Outline of a New Approach. *In:* POSY, C. y RECHTER, O. (Eds.) *Kant’s Philosophy of Mathematics*. *The Critical Philosophy and its Roots* (vol. 1), UK: Cambridge University Press, p. 248-266, 2020.

______ *Kant's Mathematical World. Mathematics, Cognition, and Experience*, UK: Cambridge University Press, 2021.

WOLFF, Christian. *Mathematisches Lexicon*, Leipzig/Hildesheim: Olms, 1716.

______ *Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften*, Frankfurt/Leipzig, Renger, 1755.

Recebido em: 26/04/2024

Aceito em: 24/06/2024