LÓGICA DE SCHRÖDINGER: UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO AXIOMÁTICO

DOI: https://doi.org/10.4013/con.2023.192.01

Allix Cardoso Caetano

Graduando em Filosofia pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Bolsista de Iniciação Científica pelo CNPq

allix.caetano@gmail.com

https://orcid.org/0009-0005-0707-3231

RESUMO:

O método axiomático é considerado uma das principais ferramentas para a sistematização do conhecimento. Inaugurado na Grécia antiga, o método axiomático passou por grandes mudanças ao longo da história. Este artigo busca estabelecer as fases de evolução da abordagem axiomática. Divide-se a axiomática em três categorias: concreta, abstrata ou formal. Divide-se em a axiomática três categorias: concreta, abstrata ou formal. Em um segundo momento, o artigo aproxima a utilização do método axiomático na física quântica, através da apresentação informal da axiomática de uma lógica não-reflexiva. Batizada pelo filósofo e lógico brasileiro Newton da Costa como *Lógica de Schrödinger*, sua motivação encontra-se na posição teórica perante o status ontológico das entidades postuladas pela física quântica, denominada *Received View*.

PALAVRAS-CHAVE:
Axiomática. Lógica não-reflexiva. Não-individualidade. Identidade.

SCHRÖDINGER'S LOGIC: AN APPLICATION OF THE AXIOMATIC METHOD

ABSTRACT:

The axiomatic method is considered one of the main tools for the systematization of knowledge. Inaugurated in ancient Greece, the axiomatic method has undergone great changes throughout history, this article seeks to establish the stages of evolution of the axiomatic approach. It is divided into three axiomatic categories: concrete, abstract or formal. In a second moment, the article approximates the use of the axiomatic method in quantum physics, through the informal presentation of the axiomatic of a non-reflexive logic. Baptized by the Brazilian philosopher and logician Newton da Costa as *Schrödinger's Logic*, its motivation lies in the theoretical position before the ontological status of the entities postulated by quantum physics, called Received View.

KEYWORDS:
Vision in God. Amour-propre. Will. Pleasure. Glory.

1 Introdução

O método axiomático é considerado uma das principais ferramentas epistemológicas para um estudo fundacional do conhecimento. Sua primeira utilização remonta aos clássicos gregos, com Aristóteles e Euclides. O primeiro tratou-a de forma científica e, em particular, erigiu um sistema lógico onde era possível verificar a verdade de outras sentenças ao considerar um conjunto elementar de sentenças como verdadeiras. O segundo aplicou este método na matemática e o que hoje se chama *geometria euclidiana* é um fragmento do resultado axiomático feito por Euclides, que também tratou sobre a natureza dos números. Apesar de existir "lampejos axiomáticos", como o projeto de Descartes, a *Ética* de Spinoza, somente no século XIX que essa apresentação formal tomaria corpo e utilizações mais profundas. Nascida no bojo da linguagem vulgar, a axiomática desprende-se da intuição e é devidamente solidificada por David Hilbert. Mesmo com grandes avanços, tanto teóricos quanto em aplicações, "[a] sua utilidade como método era duvidosa, não só no que se referia às aplicações práticas, mas até no interior da ciência pura" (BLANCHÉ, 1978, p. 89). Vista como um luxo de intelectuais ociosos, o método axiomático é reduzido a um jogo de símbolos vazio, sem significado devido à distância de qualquer utilidade imediatista.

Para circunscrever o significado de uma rede de conceitos, a axiomática tem um papel semântico importante. Ao explicitar as relações entre axiomas (hipóteses tomadas como ponto de partida), o significado de, por exemplo, uma diagonal pode ser obtida a partir do conceito de quadrilátero e triângulo mesmo "que nunca tenha ouvido a palavra diagonal" (BLANCHÉ, 1978, p. 44). Assim, os termos que não são definidos explicitamente, podem ser definidos implicitamente, através das relações que a axiomática propõe aos conceitos envolvidos.

A história da evolução do método axiomático é desenvolvida nas seções iniciais. Em ordem, Euclides e a axiomática concreta, Peano e a axiomática abstrata, por fim, Hilbert e a axiomática formal. A escolha dos autores não é por exaustividade ou exclusividade, existem outros exemplos na literatura. Dois autores são cruciais nas seções subsequentes, Newton da Costa e Décio Krause. O primeiro concebeu um sistema lógico que colocaria em dúvida um princípio lógico herdado, provavelmente, dos gregos antigos. O segundo apresentou uma aplicação de tal lógica, a teoria de quase-conjuntos. A teoria de quase-conjunto serve de apoio ao tratamento teórico de objetos que carecem de identidade, no sentido metafísico do termo. A identidade enquanto aplicada às entidades, objetos comuns da nossa experiência, desfruta uma aparente razoabilidade aceitável. Pela dificuldade de extrair explicitamente o conceito de não-individualidade, Da Costa e Krause procuram representar a não-individualidade de forma implícita, em outras palavras, na relação entre os objetos conceituais de uma teoria de forma axiomatizada. Longe de ser uma verdade necessária, o conceito de não-individualidade é construído a partir do método hipotético-dedutivo. Por fim, o artigo discute uma objeção às tentativas de abandonar, em maior ou menor grau, o princípio da identidade, colocada por Bueno (2014).

1.1 Preliminares

Em particular, este artigo pretende explicitar a relação entre o método axiomático e o conhecimento científico, que ocupará a segunda seção com as definições e exemplos de axiomáticas concreta, abstrata e formal. Num segundo momento, apresentaremos a motivação filosófica de investigar um sistema lógico não-reflexivo e sua contraparte matemática, a teoria de quase-conjuntos. A motivação filosófica reside nas teorias quânticas não-relativistas dentro da vasta Física. Modelos teóricos propostos por Bohr, entre outros, pressupõem que átomos, elétrons e afins não podem ser individuados, não é possível colorir um átomo de vermelho e identificá-lo através do tempo por tal "característica". Tal posição é chamada de *Received View* (cf. FRENCH; KRAUSE, 2006, cap. 3). A *received view* não apenas sugere uma metafísica distinta, mas também uma lógica diferente da clássica. A conexão entre a Física e Metafísica é feita através da Lógica. Uma axiomatização feita para objetos que carecem de identidade pode dar novas informações sobre as entidades que a física quântica postula. Porém, para alguns, afirmar que existe um não-indivíduo, aquele que carece de identidade, é um absurdo, uma inconsistência desmedida.

A relação entre mecânica quântica e lógica teve sua primeira abordagem feita por Birkhoff e Von Neumann (1936). O artigo intitulado *The Logic of Quantum Mechanics*, apesar de técnico e extremamente rigoroso, obteve um resultado que será simplificado aqui. Partindo do pressuposto que a nova teoria física não é compatível com os cânones da lógica clássica, os autores concluíram que a lógica subjacente à mecânica quântica é formalmente indistinguível de reticulados ortomodulares, que por sua vez não compartilha as mesmas propriedades lógicas de uma álgebra de Boole. Deixando os detalhes técnicos de lado, a mensagem que ecoa deste resultado é a necessidade de formalizar a mecânica quântica com outras ferramentas, vamos chamá-las de não-clássicas.

Na lógica clássica, três princípios merecem destaque. Dada uma proposição *p*, *p* ou não *p*, *p* implica *p* e não é o caso que *p* e não *p* são sempre verdadeiras. O primeiro denomina-se Princípio de Terceiro-Excluído, o segundo é chamado de Princípio de Identidade (na sua versão em lógica de primeira ordem, assume outra forma) e o último é conhecido por Princípio de Não-Contradição. Tais princípios foram considerados essenciais em qualquer âmbito do raciocínio, contudo os três foram colocados em dúvida e diversos sistemas não-clássicos surgiram ao restringir algum destes princípios. A crença de que não é possível relacionar fatos e pensamentos sem assumir estes três princípios, também conhecidos como 'leis do pensamento', caiu por terra. A lógica paracompleta, não-reflexiva e paraconsistente são resultados de abandonar um ou outro princípio. Assim, a lógica não-reflexiva restringe o uso do princípio da identidade, formulado ontologicamente: dado qualquer objeto, este objeto é igual a si mesmo. Em lógica proposicional, *p* implica *p*, em um nível de primeira ordem, para todo e qualquer x, x é igual a x.

2 Método axiomático

2.1 Origens Históricas

No âmbito da Lógica, Aristóteles é o primeiro a fornecer um discurso científico frente às proposições, sentenças, demonstrações, validade, contingência, necessidade, possibilidade e diversos outros tópicos que hoje pertencem ao campo da Lógica em geral (seja ela filosófica ou matemática). O que hoje se chama silogística aristotélica é um projeto iniciado pelo estagirita que consiste em estruturar sentenças da forma 'sujeito + predicado', a fim de demonstrar a validade de algumas em função de outras mais básicas, que a princípio são tomadas por verdadeiras de antemão por sua clareza. A forma sentencial que Aristóteles elegeu ser 'perfeita', denominada por *Barbara* na era medieval, é a seguinte: Se todo A é B e todo B é C, logo, todo A é C. De certo, este argumento nada informa de verdadeiro, é preciso interpretar as variáveis 'A', 'B' e 'C'. Ao interpretá-las, Aristóteles afirma que se as premissas são verdadeiras, a conclusão será verdadeira. Por exemplo, considere duas premissas, a primeira chama-se maior e a segunda, menor, 'Todo homem é branco' e 'Todo branco é racista'. Agora, em posse destas duas afirmações, segue-se que 'Todo homem é racista', e isto é verdadeiro, nesta interpretação. É evidente que nem todo branco é racista, muito menos que todo homem é branco. Isto não ocorre por falha do princípio 'perfeito' que

Aristóteles formulou. Ao interpretar as premissas com falsidades, o elo entre premissa e conclusão é perdido.

Além de construir a partir do zero o primeiro sistema de lógica, Aristóteles criou o caminho para a ciência trilhar fornecendo uma "receita" de requisitos para o conhecimento científico (Jong, Betti, 2008). A ideia poderia ser resumida na seguinte passagem:

> Se alguém aceita as premissas de um silogismo como verdadeiras, então também deve aceitar a conclusão. Não se pode, entretanto, obter todo conhecimento como a conclusão de um silogismo. É preciso começar de algum lugar com verdades que são aceitas sem discussão. Aristóteles distingue entre as verdades básicas que são peculiares a cada ciência particular e aquelas que são comuns a todas. Os primeiros são frequentemente chamados de *postulados*, e os últimos são conhecidos como *axiomas*. (KATZ, 2009, p. 43, tradução nossa).

Aristóteles sem dúvidas influenciou uma geração de filósofos, cientistas, matemáticos, entre outros, contudo, uma das maiores contribuições para o método axiomático está na obra *Os Elementos*, tratado sobre a matemática escrito por Euclides de Alexandria. Ainda que Euclides não tenha usado nenhuma espécie de silogismo *à la* Aristóteles, a distinção entre postulados e noções gerais é uma nítida herança do estagirita. É possível afirmar, com certa margem de segurança, que sem Aristóteles a axiomatização da geometria euclidiana não aconteceria, ao menos não tão cedo.

2.1.1 Euclides e a geometria

O primeiro uso do método axiomático na matemática foi efetivamente construído por Euclides de Alexandria (330-275 a.C.). No decorrer da história, o projeto euclidiano de dar a cabo de demonstrações a partir de definições, axiomas e postulados, mostrou-se incorreto, pois alguns teoremas não se seguiam apenas dos axiomas e dos postulados. O uso da intuição para preencher a lacuna 'lógica' que o teorema demandava é refletido na construção das demonstrações. Do fato de que algumas proposições, 465 ao total, não possuem rigor (no sentido atual) em suas demonstrações, não se segue que as outras não são rigorosamente obtidas das condições iniciais (definições, postulados e axiomas), assim, em uma apresentação fiel do que está em jogo, o termo 'incorreto' cede lugar para 'impreciso'.

Quando o domínio do discurso científico é levado em consideração, a axiomática *concreta*, vista como reflexo de seu modelo idealizado, "seria algo como que um conjunto de princípios, ideias, resultados, etc. acerca de um determinado domínio de estudo e, poderíamos dizer, para enfatizar, pelo menos em princípio, somente dele" (KRAUSE, 2002, p. 9). Por sua vez, Blanché (1978, p. 52) enfatiza que "isto [axiomática concreta] significa que ainda se mantenha em contato com os conhecimentos que organiza e que apresente um conteúdo que conserve o seu sentido e a sua verdade empíricos". De nossa parte, indicamos que a axiomática concreta não abstrai o significado utilizado nas sentenças, ela não se desvincula das nossas intuições empíricas, oposto à axiomática formal que ao abstrair o significado intuitivo das sentenças preserva apenas a estrutura da teoria (KRAUSE, 2002).

A geometria, antes dos gregos, era apenas um conjunto de técnicas de agrimensura, cálculo de volumes etc. Não havia um interesse de demonstrar teoremas sobre a própria disciplina em questão. Mas, por que a axiomática conforme Euclides é denominada concreta? Considere a primeira proposição (demonstração) que consta nos *Elementos*: construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada. Dado uma reta AB, é possível traçar um círculo C com centro A e raio AB, esta construção é permitida pelo terceiro postulado. Analogamente, construímos outro círculo C' de centro B e raio AB, assim, a intersecção M ocorre em dois pontos de C e C', por final ligamos os pontos ABM. Qualquer mão munida de régua e compasso consegue construir tal demonstração e visualizá-la. Porém, "[o] problema é que nada dado antes permite inferir que os dois círculos traçados se interceptam, como suposto informalmente" (KRAUSE, 2002, p. 5).

Ao não abandonar o uso de imagens, o rigor lógico atual recusa tal demonstração como válida. Não é permitido usar a intuição dentro da axiomática, cada passo deve ser permitido por regras explícitas, em uma analogia pitoresca, não podemos mover a torre na diagonal em uma partida de xadrez comum, assim como o uso de imagens não é permitido na apresentação axiomática.

2.1.2 Peano e axiomática abstrata

Giuseppe Peano (1858-1932) apresentou uma axiomatização da aritmética. Os termos primitivos são: o zero, o sucessor de e o número. Os postulados, em notação simbólica para linguagem natural, são os seguintes:

1. O zero é um número;
2. O sucessor de um número é um número;
3. Vários números quaisquer não podem ter o mesmo sucessor;
4. Zero não é sucessor de nenhum número;
5. Seja *P* uma propriedade de números. Se zero possui *P*, e se, sempre que um número possui *P*, seu sucessor também possui *P*, então todos os números possuem *P*.

Diferentemente da geometria euclidiana, o conjunto de objetos que caem como conceito desta axiomática são números, ao invés de pontos, retas e afins. Os termos primitivos são razoavelmente de fácil apreensão e os postulados garantem a construção de todos os números naturais. Ao considerar o postulado 1 e 2, é possível definir o número 1, e com este em mão, obtém-se o número 2, e assim por diante.

Porém, como Bertrand Russell bem observou, se interpretarmos o termo primitivo ‘zero’ como ‘100’, e por ‘número’ cada número que seja maior do que 100, os cincos axiomas continuam verdadeiros. Até o quarto postulado continua verdadeiro, já que por número limitamos, nesta interpretação, somente números maiores que 100, portanto, ‘99’ não é um número e ‘100’ não é sucessor de nenhum número.

Munido destes postulados e diferentes interpretações, podemos construir diversas progressões numéricas. Por exemplo, para construir o conjunto de números pares basta interpretar o postulado de sucessor como a operação de somar 2 e definir o termo primitivo ‘número’ como ‘número par’. Nesta interpretação, o sucessor de 0 é 2, o próximo será o 4 e assim em diante (0, 2, 4, 6, ...).

Importante notar que Euclides não concebia a possibilidade de fornecer diferentes interpretações aos termos primitivos e postulados. Aqui, nas axiomáticas abstratas, existe uma diferença de atitude, de se perceber que uma mesma formulação axiomática pode receber diferentes leituras, desvinculadas da interpretação pretendida. Assim, o domínio de objetos/conceitos aos quais a axiomática pretende sistematizar é fluído, não há um domínio rígido e único. Há uma infinidade de interpretações verdadeiras, que por sua vez geram progressões infinitas, a depender de como se interpreta postulados e termos primitivos.

Assim, podemos definir a axiomática abstrata como sistematizações do saber que se desprendem do significado intuitivo dos termos primitivos, postulados e axiomas, para ganhar interpretações. Tais interpretações não são estritamente verdadeiras, antes, precisam satisfazer os axiomas. Se uma interpretação “concorda” com o resultado esperado, dizemos ser um modelo dos axiomas.

2.1.3 Hilbert e a axiomática formal

David Hilbert (1862-1943) apresentou uma versão axiomática da geometria euclidiana, denominada *axiomática formal*. Em seus trabalhos, o matemático procurou preencher as lacunas que existiam nas demonstrações de Euclides. É natural que o método axiomático ganhasse rigor na medida em que seu uso fosse difundido e praticado, “como notou Hilbert, o uso do método axiomática nesta forma ‘concreta’ conduz a axiomáticas ‘formais’” (KRAUSE, 2002, p. 9). A diferença de uma axiomática formal da abstrata, é que esta última é dada em linguagem natural, sem rigor nas definições e na explicitação das regras de dedução. Por exemplo, uma apresentação formal da teoria de Peano não conteria mais as palavras ‘número’, ‘sucessor’, antes, na axiomática formal, é apresentada em alguma linguagem formal, como a Lógica de Primeira Ordem. Ao subtrair o significado intuitivo dos postulados, axiomas, explicitando as regras de dedução em uso, “fica explicitada, então, uma estrutura” (KRAUSE, 2002, p. 11). Hilbert trabalhava com alguns pressupostos anteriores, como demonstrações finitárias, a existência de objetos matemáticos consistentes (existe aquilo que não for contraditório) e a noção de definição implícita.

A noção de definição implícita foi introduzida por Joseph Diez Gergonne em 1818. Em *Essai sur la théorie des définitions*, o autor começa com o seguinte objetivo,

> Nada parece mais apropriado a diminuir do que o orgulho do homem; a inspirá-lo uma justa desconfiança de si mesmo, e para mostrar-lhe quão estreitos são os limites de sua inteligência; nada pode melhor fazê-lo sentir quanto o que ele chama de sua razão ainda está envolto em nuvens e trevas do que a divergência das opiniões dos maiores filósofos, ou pelo menos daqueles que são universalmente considerados como tais, não direi sobre esta doutrina, particularmente relativa a este ou aquele ramo de nossos conhecimentos, mas sobre estas doutrinas primárias que parecem dever ser o fundamento comum de todo saber humano. (GERGONNE, 1818, p. 1, tradução nossa).

O autor divide as definições em duas categorias, (1) definições explícitas e (2) definições implícitas. Por exemplo, é de forma implícita, indireta, que a lei de queda dos corpos define o conceito de queda livre (BLANCHÉ, 1978). De forma similar, os axiomas e as relações que estes impõem aos objetos do domínio "definem" os objetos captados em sua formulação. Para que uma apresentação formal seja relevante, o essencial é "que se demonstre que no seu conjunto o sistema é *consistente* e para isto os métodos vulgares são inúteis" (KNEALE; KNEALE p. 692).

Na virada do século XX, o método axiomático ganhou sua devida importância para além dos campos da matemática. A lógica enquanto disciplina filosófica era em grande parte vista como acabada, levando a grandes pensadores como Kant afirmar que Aristóteles havia desenvolvido tudo que pudesse ser concebido enquanto ciência das inferências. Em 1855, o filósofo alemão Karl von Prantl, importante historiador da lógica, seguindo Kant, foi mais longe e afirmou que qualquer novo desenvolvimento em lógica, caso discordasse de Aristóteles, seria confuso, estúpido ou perverso. A lógica estoica, por exemplo, era vista como "decadente e corrompida" pelo historiador (Dinucci *et al.*, 2016, p. 16). Autores como Boole, De Morgan, Frege e Russell trouxeram luz às axiomatizações da própria lógica, aplicando o método axiomático de forma primária, isto é, o método axiomático aplicado à própria lógica.

A formalização da lógica *per se* permitiu a identificação de seus princípios básicos, como regras de inferência, valores de verdade, capacidade de expressão das linguagens, entre outras características dos sistemas de lógica. A identificação dos princípios básicos ancorados nas axiomatizações feitas pelos autores acima citados, por exemplo, as "três leis do pensamento", também levou a formulações alternativas de sistemas lógicos que violassem esses princípios, colocando assim em cheque a necessidade estrita de assumir algum dos três princípios. A lógica não-reflexiva é o resultado de violar um destes princípios, e que será desenvolvido na próxima seção.

2.2 A lógica não reflexiva

Dentro da Lógica, três dogmas gozaram de validade inquestionável no decorrer da história. O Princípio de Não-Contradição, o Princípio da Identidade e o Princípio do Terceiro Excluído. O lógico e filósofo brasileiro Newton da Costa colocou dois destes em dúvida no seu *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. A lógica que desafia a noção de identidade foi batizada como a *Lógica de Schrödinger* e aparece como um adendo em um total de três páginas. Nas palavras do autor, "Batizamos de *lógica de Schrödinger* uma lógica na qual o princípio de identidade careça de significado para certos objetos. Mostramos, a seguir, como se formaliza uma tal lógica (de primeira ordem) [...]" (DA COSTA, 2008, p. 138). O princípio de identidade pode ser caracterizado de diversas maneiras, uma possível formulação é a seguinte, para todo e qualquer objeto x, x é igual a x.

Erwin Schrödinger, físico teórico austríaco, acreditava que as partículas (átomos, elétrons e afins) não são indivíduos identificáveis, e que não é fácil compreender esta "*ausência de individualidade"* e descrevê-la em palavras (KRAUSE, 2002, p. 186). Em particular, Schrödinger "sustentou que o conceito de identidade carece de sentido para partículas elementares, e o mesmo se dá para a questão da individualidade [...]" (KRAUSE, 2002, p. 186). E é esta aplicação da identidade que é restringida na *Lógica de Schrödinger*.

A noção de identidade não pode ser aplicada ao que o autor chamou de "variáveis de primeira espécie" (Da Costa, 2008, p. 138). A ideia de Da Costa é restringir o uso da identidade matemática, criando dois tipos de constantes individuais, a primeira espécie *ab initio* recusa sintaticamente a igualdade, se *x* e *y* são variáveis da primeira espécie "x=y" não é nem uma fórmula bem formada. A segunda espécie de variável obedece à reflexividade (x=x).

Da Costa termina seu adendo com as projeções que um futuro desenvolvimento da *Lógica de Schrödinger* deve ater-se. O primeiro ponto é a necessidade de elaborar uma semântica formal, ainda que seja dificultosa tal empresa. O segundo ponto é a generalização total da *não-identidade*, nas palavras do autor, "a relação de identidade deveria carecer *em geral* de sentido" (DA COSTA, 2008, p. 140, ênfase adicionada).

2.3 A teoria de conjuntos

A teoria dos conjuntos é um ramo importante da Matemática e para as ciências em geral. A maior parte da matemática pode ser reduzida às operações conjuntistas. Nesta seção, falaremos brevemente sobre a Teoria dos Conjuntos Ingênua (TCI) e seus pressupostos clássicos, do ponto de vista lógico. Como dito acima, as “três leis do pensamento”, por conta de sua aparente validade universal, acabaram incorporados pela TCI. Desta forma, TCI deriva toda e qualquer consequência de assumir o Terceiro-Excluído, a Não-Contradição e a Identidade.

A Teoria dos Conjuntos Ingênua foi desenvolvida inicialmente por Georg Cantor (1845 – 1918). A primeira versão axiomática da teoria de conjuntos apareceu em um artigo publicado no ano de 1908 por Ernest Zermelo. O autor do artigo procurou aliar dois ingredientes, (1) a teoria de Cantor e (2) o uso do método axiomático. O objeto de estudo das teorias conjuntistas são, grosso modo, sobre coleções. Por exemplo, uma lista com todas as capitais dos estados brasileiros forma um conjunto de cidades. Para falar de *coleções*, Zermelo faz uma distinção, que será importante adiante, entre conjuntos e átomos (*Urelemente*). O radical *Ur*, em alemão, significa primevo, anterior, primitivo. Os *Urelemente* são objetos matemáticos que não são conjuntos, mas elementos destes. Conjuntos são coleções de *Urelemente* ou de outros conjuntos. A classe de todos *Urelemente* e conjuntos possíveis e imagináveis representa o domínio do universo (*Bereich*). Somente com os trabalhos independentes de Skolem e Fraenkel que a versão axiomática de Zermelo sofre mudanças positivas.

Com a distinção *ab initio* entre indivíduos e coleções, a ontologia pressuposta por Zermelo está ancorada em objetos, propriedades, relações e coleções. Assim, a ideia de Fraenkel e posteriores desenvolvedores da TCI concentrou-se em simplificar a ontologia (formal) básica da teoria de Zermelo, retirando a noção de átomos, que não são essenciais pressupostos para edificar a TCI (KRAUSE, 2002).

A teoria de Quase-Conjuntos serve para tratar de coleções cujos objetos podem ser entendidos como não-indivíduos, a identidade e a diferença não são conceitos aplicáveis a estes objetos. Filosoficamente falando, é inviável utilizar artifícios *ad hoc* para simular a não-individualidade, caso se queira representar os não-indivíduos dentro de uma teoria *objectual*, feito a TCI. Daí a necessidade da teoria de quase-conjuntos. No Congresso organizado pela American Mathematical Society em 1974, onde levantou-se importantes problemas da matemática que norteariam os futuros desenvolvimento da disciplina, o matemático russo Yuri Manin propôs o problema da determinação da cardinalidade de uma coleção de objetos indistinguíveis. Manin sugere que uma linguagem mais adequada fosse forjada para lidar com objetos deste tipo, as partículas atômicas. Krause ressalta, “os *quanta* têm que ‘nascer’ indistinguíveis na teoria, e não ‘serem feitos’ indistinguíveis por artifícios *a posteriori* [...]” (KRAUSE, 2002, p. 186). A cardinalidade de um conjunto é determinada por uma bijeção com outro conjunto, caso exista tal função bijetiva, podemos conhecer a cardinalidade do(s) conjunto(s).

A teoria de quase-conjuntos é uma resposta ao problema de Manin. M. L. Dalla Chiara e Toraldo di Francia desenvolveram a teoria *quasets*. O artigo intitulado *Individuals, Kinds and Names in Physics*, publicado em 1993, contém uma apresentação desta teoria. Após uma longa defesa filosófica e científica, os autores introduzem o conceito de *quaset* “para uma coleção de elementos que podem ser *indistinguíveis* uns dos outros” (DALLA CHIARA; TORALDO DI FRANCIA, 1993, p. 268). De maneira independente, Krause em sua dissertação propôs a teoria Q, publicada em 1990 sob o título de *Non-reflexivity, indistinguishability and Weyl’s aggregates*. De acordo com o autor, é possível construir um aparato lógico-matemático que não está diretamente comprometido com a noção tradicional de identidade, “a lógica subjacente é um tipo de lógica não-reflexiva” (KRAUSE, 1992, p. 410, tradução nossa). A lógica subjacente, a estrutura formal onde os axiomas são elaborados, não respeita o comportamento da identidade no sentido tradicional, ainda que “muitos resultados clássicos de ZFU podem ser provados em S* [...]” (KRAUSE, 1992, p. 410, tradução nossa). ZFU é a teoria de Zermelo-Fraenkel com a re-adição de *urelements*, ainda que ZF seja uma simplificação de ZFU, esta última tem valor prático, pois consegue comportar a noção de não-indivíduo, gerando coleções de quase-conjuntos.

Por fim, é importante salientar o entrelaçamento entre o método axiomático e a metafísica. Ainda que existam diferentes maneiras de capturar o significado da não-individualidade, French considera que “Uma forma de teoria de quase-conjunto pode fornecer uma maneira de capturar formalmente essa noção” (FRENCH, 2019, tradução nossa). A relevância do aparato conceitual da teoria de quase-conjunto se dá na definição implícita da não-individualidade, visto que seria extremamente dificultoso extrair o significado desse conceito apenas de observações e experiências. Assim, a partir da axiomática aqui discutida, obtém-se um conteúdo metafísico, o significado de *não-indivíduos.* Ao que tudo indica, nossas observações vêm um mundo consistente e objectual, por isso há resistência de autores conservadores, pois é necessário cautela ao violar princípios que estão de acordo com as impressões dos sentidos humanos. A identidade é fundamental para a edificação da matemática clássica, mas no escopo da física quântica sua utilização é dúbia, de acordo com os fundadores das teorias quânticas. Na próxima seção, analisaremos uma das objeções feita à violação do princípio da identidade.

2.4 Objeções de Bueno

Ainda que rapidamente mencionado na seção dos objetivos, alguns autores acreditam que abandonar o princípio da identidade não é tão fácil. Otávio Bueno (2014) defende a idéia de que a identidade é fundamental para a metafísica. Para o autor, a identidade cumpre papel decisivo para as atividades humanas, em pelo menos quatro aspectos: (i) qualquer sistema conceitual pressupõe a identidade; (ii) para definir um indivíduo a identidade é necessária; (iii) a identidade é indefinível; (iv) a quantificação é necessária para quantificação. Por conta de escopo, trataremos apenas de (i).

De acordo o autor: “conceitos são usados para classificar objetos, fazer distinções entre eles e agrupá-los” (BUENO, 2014, p. 325). Há dois níveis de identidade, de um lado a identidade entre objetos, por outro a identidade de conceitos. Consideremos o caso da igualdade de conceitos em termos de extensionalidade e complementariedade. A extensão de um conjunto é a coleção dos objetos que o compõe. Dois conjuntos são iguais, de acordo com o axioma da extensionalidade, caso a coleção de objetos que os compõem são iguais. O complemento de um conjunto é a coleção de objetos que não pertencem ao mesmo conjunto, por exemplo, um possível complemento do conjunto dos números pares é o conjunto dos números ímpares, em um universo limitado aos números naturais.

Krause e Arenhart (2019) apontam dois problemas nesta concepção extensional de conceitos. (1) conceitos que não se aplicam para nenhum objeto possuem a mesma extensão, todos os objetos do domínio, pois é impossível que algo “seja vermelho e não-vermelho”. A extensão deste último conceito é sempre equivalente ao universo do discurso. Alternativamente, (2) conceitos que se aplicam a todos objetos caem em posição análoga, são predicáveis de todos os objetos, e possuem a mesma extensão. Contudo, é evidente que cada ‘conceito’ é diferente dos outros, seja por modo ou qualidade (duas contradições diferentes são diferentes entre as contradições, e as contradições são diferentes das tautologias, ou fórmulas válidas, então, temos dois níveis de diferenciação). Isto fica mais evidente visualizado com aparatos formais. Contradições são fórmulas nunca satisfatíveis, nenhuma sequência de objetos ou valores de verdade as tornarão verdadeiras. As tautologias, ou fórmulas válidas, são satisfatíveis por qualquer sequência de objetos ou valores de verdade. Contudo, ainda que possuam a mesma extensionalidade são fórmulas distintas! Existem inúmeras tautologias, ou fórmulas válidas, assim como contradições distintas entre si. Dizer que ‘chove e não-chove’ é distinto de afirmar que ‘Machado de Assis não é Machado de Assis’. Portanto, a afirmação de Bueno que a identidade é essencial para distinguir conceitos não se segue tão apressadamente.

3 Conclusão

O método axiomático tem três fases cruciais, concreta, abstrata e formal. Apenas no último estágio que é explicitado a lógica usada na axiomatização, tornando explícito a lógica subjacente que serve de apoio à axiomatização, na etapa formal, encontramos a noção de definição implícita, que servirá para caracterizar formalmente a noção de não-indivíduo nos sistemas de *Lógica de Schrödinger*, através da violação do Princípio de Identidade.

A lógica clássica, ferramenta utilizada em grande escala no século XX, pressupõe, no mínimo, três princípios. O Princípio da Identidade, em suas diferentes formulações, compromete-se com uma ontologia objectual.

A tese que permeia todo este artigo, sobre a influência destes três princípios clássicos no pensamento científico, pode ser vista com detalhes no *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. Uma linha de interpretação do projeto intentado no livro é que "[…] da Costa segue pensadores […] defendendo que as origens da lógica tradicional estão arraigadas nas relações que teria com a geometria euclidiana" (KRAUSE, 2015, p. 91). Nesta linha, o princípio da identidade é apenas uma herança da crença que os objetos geométricos permanecem idênticos a si mesmos.

A teoria de quase-conjuntos é uma estrutura formal onde a relação de indiscernibilidade não colapsa na relação de equivalência ('=' matemático). A aceitação ou não do princípio da identidade "depende de fatores pragmáticos" (DA COSTA, 2008, p. 133). E somente com o desenvolvimento da axiomática formal que foi possível enxergar os pressupostos anteriores às axiomatizações, e assim, assumi-los ou restringi-los tornou-se uma opção teórica viável.

4 Referências

BIRKHOFF, Garret, VON NEUMANN, John. The Logic of Quantum Mechanics. **Annals of Mathematics**, v. 37, n. 4, p. 823–843, 1936.

BLANCHÉ, Robert. **A axiomática**. Lisboa: Presença, 1978.

BUENO, Otávio. Why identity is fundamental. **American Philosophical Quarterly**, v. 51, n. 4, p. 325–332, 2014.

CHIARA, Maria Luisa Dalla., DI FRANCIA, Giuliano Toraldo. Individuals, Kinds and Names in Physics. In: Corsi, G., Chiara, M.L.D., Ghirardi, G.C. (eds) **Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, and Physics**. Boston Studies in the Philosophy of Science, vol 140. Springer, Dordrecht, 1993.

DA COSTA, Newton Carneiro Affonso. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica**. São Paulo: Ed. Hucitec, 2008.

DE JONG, Willem Remmelt, BETTI, Arianna. The Classical Model of Science: a millennia-old model of scientific rationality. **Synthese**, v. 174, p. 185–203, 2010.

DINUCCI, A., DUARTE, V., FONTES, L. M., CABECEIRAS, A. & DE BRITO, R. P. Introdução à lógica Proposicional estoica. **Prometheus – Journal of Philosophy**, 2016.

FRENCH, Steven, KRAUSE, Décio. **Identity in Physics. A historical, philosophical and formal analysis**. Oxford: Oxford University Press, 2006.

FRENCH, Steven. Identity and Individuality in Quantum Theory. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Winter 2019 Edition). Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/qt-idind/. Acesso em: 05/10/2022

GERGONNE, Joseph Diez. Variétés. Essai sur la théorie des definitions. **Annales de Mathématiques pures et apliquées**, tomo 9. p. 1-35, 1818.

KATZ, Victor Joseph. **A history of mathematics**. Third Edition. Pearson, 2009.

KNEALE, William Calvert, KNEALE, Martha. **O desenvolvimento da lógica**. 3. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

KRAUSE, Décio, ARENHART, Jonas R. B. Is identity really so fundamental? **Foundations of Science**, v. 24, n. 1, p. 51–71, 2019.

KRAUSE, Décio. On a quasi-set theory. **Notre Dame J. Formal Logic**, v. 33, n.3, p. 402–411, 1992.

______. **Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência**. Curitiba: Ed. EPU, 2002.

______. **Tópicos em Ontologia Analítica**. Editora Unesp. 2015.

Recebido em: 09/04/2023

Aceito em: 27/06/2023