

# A PRÁTICA DA TESSELAÇÃO: RACIONALIZAÇÃO CONSTRUTIVA DE PAINÉIS ARQUITETÔNICOS COMPLEXOS

## THE PRACTICE OF TESSELLATION: CONSTRUCTIVE RATIONALIZATION OF COMPLEX ARCHITECTURAL PANELS

Fábio Lima<sup>1</sup>

### Resumo

A técnica mais usual para tornar exequíveis painéis resultantes de geometrias complexas advindas de superfícies arquitetônicas irregulares tem sido a tesselação. Essa técnica de divisão de polígonos viabiliza a execução de painéis para fachadas, estruturas espaciais, brises, elementos decorativos, etc. A divisão objetiva a formação de peças planas, sem distorções estéticas e com relativa perda de suavidade da formação inicial. Essa divisão não pode ser arbitrária, já que o conjunto de formas deve estar preferencialmente dentro de um número finito e mais facilmente determinável. São realizados os seguintes ensaios: estudo da abordagem inicial da tesselação, operação de discretizar, análise gaussiana, operação de otimizar e, por fim, legitimação do resultado. Essas ações tornam adequadas a construção da forma irregular arquitetônica (variável em relação à escala), simplificando formas geométricas em níveis muito específicos. Os resultados da pesquisa apresentam reflexões no sentido de tornar realizável a construção das superfícies complexas, organizando a subdivisão em etapas, para garantir satisfatória exequibilidade: facilidade de execução das peças, logística de manuseio e transporte, compatibilização entre a estrutura e a vedação, execução no local.

**Palavras Chave:** subdivisão de superfícies, adequação construtiva, superfícies de formas livres.

### Abstract

The most common technique for making panels resulting from complex geometries from irregular architectural surfaces feasible has been tessellation. This polygon splitting technique enables the execution of panels for facades, space structures, brises, decorative elements, etc. The division aims at forming flat pieces, without aesthetic distortions and with a relative loss of smoothness in the initial formation. This division cannot be arbitrary, since the set of forms should preferably be within a finite number and more easily determined. The following tests are performed: study of the initial tessellation approach, discretizing operation, Gaussian analysis, optimizing operation and, finally, legitimizing the result. These operations make it possible to construct the irregular architectural shape (variable in relation to the scale) by simplifying geometric shapes at very specific levels. The research results show reflections in order to make the construction of complex surfaces feasible, organizing the subdivision in stages to ensure satisfactory feasibility: ease of execution of parts, handling and transportation logistics, compatibility between the structure and the seal, execution on site.

**Keywords:** subdivision surfaces, constructive adequacy, freeform surfaces.

---

<sup>1</sup> Universidade Federal de Goiás, <https://orcid.org/0000-0002-4117-5830>, [fabio.lima@ufg.br](mailto:fabio.lima@ufg.br)

## INTRODUÇÃO

O aprimoramento das ferramentas de modelagem computacional fez surgir uma grande diversidade de modelos arquitetônicos irregulares. As arquiteturas de formas complexas instauraram diversos tipos de questões no âmbito profissional e acadêmico, ao mesmo tempo em que ampliaram os estudos das técnicas construtivas, desenvolvendo consideravelmente seus escopos. No passado as formas complexas eram vistas com ressalvas, dadas as condições tecnológicas disponíveis para execução. Nessa perspectiva, a forma irregular ampliava exponencialmente a dificuldade construtiva e contrariava os princípios tradicionais da racionalização formal, economia de materiais e o preço da mão de obra, onerando significativamente a execução. Já no atual contexto da sociedade informacional, muitos autores já demonstraram que essa afirmação nem sempre é verdadeira (1,2). Se uma obra for muito bem organizada e planejada, as técnicas de fabricação digital e customização em massa adquirem mais valia, considerando que a complexidade construtiva pode lograr uma grande valorização do edifício, e assim ser altamente compensatória.

Muitas formas complexas desenvolvidas no âmbito computacional não podem ser edificadas. O ambiente do computador é um mundo sem gravidade (3), onde relações físicas reais precisam ser simuladas em estágios lógicos de adequações construtivas. Se os estudos das formas podem avançar sem limites no âmbito das experiências livres, a validação construtiva é a contrapartida para moderar essas manifestações, que devem se ajustar às leis do mundo real. De qualquer modo, as formas complexas promovem estudos altamente detalhados e profundos envolvendo a elaboração sistemática de algoritmos para circunstâncias muito específicas.

Para resolver parte desses problemas acarretados pela concepção das chamadas “formas livres”, ao longo dos anos foram sendo desenvolvidas diversas técnicas buscando viabilizar esses trabalhos. De modo geral, as experiências computacionais permitiram especular propostas com grandes diferenças daquelas concebidas pelos suportes tradicionais (4). Os computadores toleram reiterativas possibilidades de mudanças, facilitando o processo de projeto até que se atinja um resultado satisfatório. Desse modo, também apenas com o uso dos computadores é possível validar muitas das situações criadas. No decorrer dos anos, para que isso se tornasse realidade, as ações empreendidas só puderam se concretizar pela associação de equipes multidisciplinares advindas da engenharia civil, matemática e principalmente das ciências da computação.

Os objetivos deste artigo visam apresentar os conceitos e condicionantes que envolvem a técnica da tesselação, que tem se mostrado como uma das maneiras mais eficientes quanto à transformação processual dispensada pelas superfícies oriundas das formas livres. O conjunto de ações a serem descritas se estabelece visando o preparo da geometria com fins à sua execução física: elas devem ser analisadas sob critérios que as tornem exequíveis. É bastante consensual entre diversos autores que a divisão em partes menores permite validar os contornos irregulares da geometria, viabilizando a execução das peças e principalmente mitigando os custos da obra. Desse modo, em termos de significativa redução de custos, torna-se altamente desejável que essa fragmentação ocorra mediante a repetição de elementos menores também dentro de uma mesma lógica estruturada.

Assim, se as técnicas de tesselação têm se tornado comuns para a racionalização de superfícies complexas, quais são as etapas graduais que amparam esse procedimento? Quais abordagens mais frequentes têm sido tomadas no sentido de resguardar ao máximo a forma inicial concebida, sem que a adaptação construtiva não cause grandes alterações visuais? Nessa premissa, ideias muito originais podem se tornar reais e, em função da qualidade do processo de projeto, manter relativamente inalterado um conjunto de lógicas adequadamente estruturadas sob forma de uma geometria pertinente.

Este artigo apresenta ideias manifestadas numa área ainda com muitas possibilidades a serem investigadas, com grande efervescência ao redor do globo. De qualquer modo, se as arquiteturas oriundas das experiências digitais estão cada vez mais presentes e suas soluções parecem sinalizar opções bastante interessantes, é preciso pensar seriamente em alternativas viáveis de suas execuções. Para facilitar as explanações, alguns quadros foram desenvolvidos, exemplificando as etapas genéricas que costumam ser seguidas, pois são relevantes na apreensão de problemas comuns e na validação de certas alternativas, constituindo uma trajetória cautelosa de trabalho.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A discussão que envolve as arquiteturas digitais e as técnicas de resolução de painéis têm sido realizadas por especialistas, em abordagens extremamente complexas. Os trabalhos desenvolvidos são divulgados à comunidade científica em tratamentos altamente especializados, não apenas apresentando descobertas na área da matemática discreta (especialmente adequada ao desenvolvimento de algoritmos, linguagem de programação, criptografia, etc.), mas também envolvendo problemas muito específicos de geometria, cálculo estrutural e outras circunstâncias da física aplicada. Em outras palavras, representam materiais de difícil acesso, pouco inteligíveis para a grande maioria dos arquitetos.

Para que alguns desses estudos se tornassem mais acessíveis, neste artigo as suas condições principais foram apresentadas com base em Helmut Pottmann *et al.* (5). A discussão é iniciada pelas características tipificadas das *NURBS*, inspiradas nos estudos de Marko Tomičić (6). Os demais procedimentos se apoiam em Michael Eigensatz *et al.* (7, 8), Matthias Rippmann e Philippe Block (9) e Stefan Sechelmann *et al.* (10). Além disso, outras problematizações oriundas dos modelos digitais são inseridas, tendo em vista os estudos de Branko Kolarevic (1), Joy Ko e Kyle Steinfeld (11), Achim Menges (12), Renata Piazzalunga (4) e Arlindo Machado (3).

Observada de forma simples, a tesselação consiste em criar numa determinada geometria um conjunto de pontos ordenados, uma matriz regular com certo número de linhas e colunas, ainda que sejam possíveis também disposições radiais e mistas. Existem muitas possibilidades de associação geométrica, reunindo tanto conjunto de polígonos regulares quanto formas irregulares. Esses fundamentos são apresentados por Jill Britton (13), Buckminster Fuller e Daniel López-Pérez (14), Volker Settgest *et al.* (15). Ao utilizar recursos computacionais, a criação de uma grade permite aplicar padrões bidimensionais e tridimensionais onde ocorrerá a tesselação. O modelo desenvolvido para testes neste artigo e apresentado nos quadros foi

realizado no software *Rhinoceros* junto com os *plugins Grasshopper e Paneling Tools*. O desenvolvimento técnico e operacional segue as instruções de Rajaa Issa (16).

A grade inicial pode ser conseguida de forma interativa pelo usuário (baseada em quantitativos de pontos, distâncias prefixadas, módulos predeterminados pelo usuário, etc.). Um domínio de superfície pode ser dividido com grade de distância variável, usando as propriedades de sua superfície, assim como também outras restrições (curvatura gaussiana, curvatura média, pontos de atração, etc.) (16). Essas operações possibilitam determinar uma escala, um tamanho médio que essas retículas assumem diante da superfície a ser fragmentada.

Nessas circunstâncias, os algoritmos presentes nesses softwares citados anteriormente partem do princípio de que a tesselação se dará conforme as superfícies NURBS e as interpolações internas das *isocurves* (ver 1ª linha do Quadro 1 adiante). Se as superfícies possuem dobras mais fechadas, um número maior de *isocurves* fará parte da superfície NURBS e resultará numa maior fragmentação da grade. Assim, quanto mais complexa se apresenta a superfície, mais *isocurves* são dispostas na horizontal e vertical, como perfis sucessivos a darem conta de formar essa extensão tridimensional. O aumento do número das *isocurves* pode ser percebido no exemplo criado (ver primeira linha do Quadro 1 mais adiante), onde a linha passa por extrusões e depois sofre alguma distorção na borda. Para outras circunstâncias específicas, a quantidade de *isocurves* pode também ser editada pelo usuário.

Do conjunto de coisas a serem feitas, a simplificação da geometria irregular é sempre um procedimento fundamental. Ainda que existam muitas particularidades, o resultado geométrico adequado é aquele proveniente de um arranjo matemático preciso, sendo os elementos individuais de grande importância para a integridade estrutural do todo. Nesse sentido, ainda que os algoritmos estejam realizando procedimentos com regras geométricas que visam esse equilíbrio, diversos parâmetros podem ser modificados pelos usuários (9).

## RESULTADOS

A repetição de mesmos elementos geométricos (preferencialmente planos) muitas vezes é a chave para a compatibilização da complexidade geométrica a ser atingida, o custo do projeto, a adequação da estrutura, a fabricação das peças, a execução da obra, a logística do projeto. Desse modo a técnica da repetição pode ser entendida como uma atitude de bom senso. No entanto, conseguir uma alta repetição de elementos numa geometria irregular costuma ser um enorme desafio (5). Nem sempre é possível levar essa repetição aos limites das formas, ou mesmo podem surgir lacunas entre painéis, a depender da configuração topológica, além de vir também a causar movimentos visuais desagradáveis. Todas essas situações podem ocorrer na divisão em painéis, aplicáveis a uma quantidade extensa de elementos, sejam fachadas, estruturas espaciais, brises, divisórias, objetos decorativos, etc.

Os passos a seguir referem-se a estudos sobre superfícies complexas, no sentido de adequar a construção: facilitar a execução das peças, melhor

empreender uma logística de manuseio e transporte, compatibilizar estrutura e vedação, executar *in loco*. As ações compreendem fazer o estudo de viabilidade das formas (estudo da abordagem da tesselação), discretizar, fazer análise gaussiana, otimizar e, por fim, legitimar. O Quadro 1 exemplifica cada um dos casos e suas descrições estão também a seguir. Essas operações tornam viável a construção da forma irregular arquitetônica (variável em relação à escala), simplificando formas geométricas em níveis muito específicos.

a) Estudar a abordagem

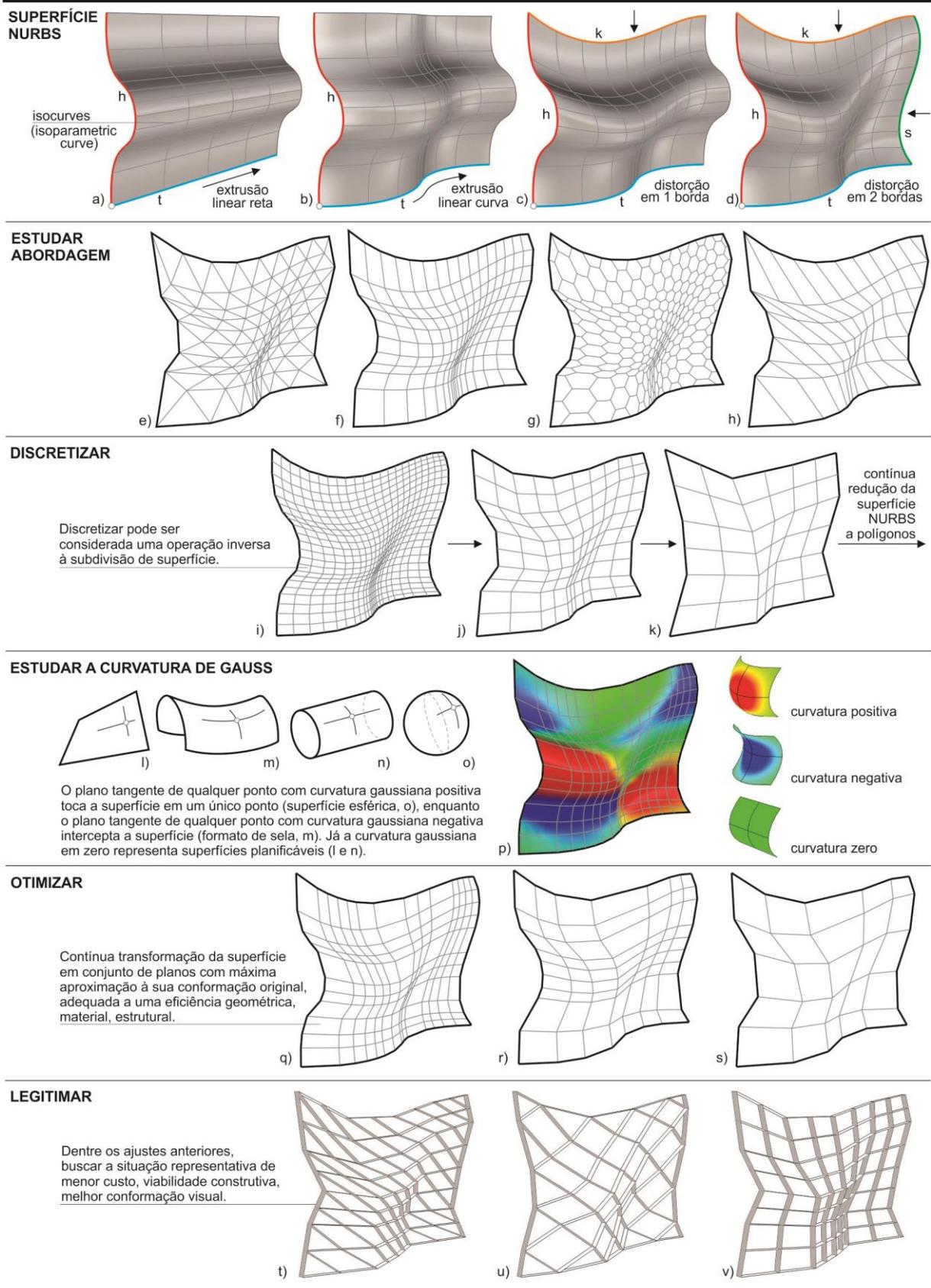
Como existem diversos tipos de tesselações, faz-se necessário realizar estudos preliminares capazes de demonstrar qual delas pode responder melhor à conformação irregular. Ainda que as tesselações baseadas no triângulo, retângulo e hexágono sejam mais fáceis, pode haver situações em que sejam requisitados dimensionamentos variáveis (ver 2ª linha do Quadro 1). A recomendação de Michael Eigensatz *et al.* (8) é que haja repetição máxima para os polígonos (tesselação regular, com o uso de um único polígono; ou semirregular, com dois ou três polígonos associados), conformando peças que sejam utilizadas indistintamente, dispensando a necessidade de haver peças numeradas em sequência específica de montagem.

b) Discretizar

A redução de formatos complexos curvos a grupos de polígonos capazes de restituir em diferentes graus de precisão o formato global anterior é conhecida na matemática pela operação de discretizar. Discretizar também pode ser pensado em arquitetura como uma operação de adequação a uma determinada condição física do material, já que impõe um modo específico de ser apropriado (17). Boa parte dos materiais não é flexível e possui diferentes índices físicos, implicando também técnicas de ajuste e manuseio muito variados. Desse modo, as linhas curvas abrandadas suavemente pelas funções matemáticas das NURBS são transformadas em conjuntos de segmentos retos. Quanto maiores forem os valores utilizados na discretização, maiores se dão as formações dos segmentos e, conseqüentemente, dos planos correspondentes. Assim, discretizar é uma operação fundamental para se obter geometrias mais simples e minimizar os problemas de construção. Em certas circunstâncias arquitetônicas, torna-se um interessante processo de efeito óptico causado nos observadores, como numa impressão de *Gestalt*, em que é necessário restaurar visualmente porções que possuam certa incompletude. Se realizada de forma hábil, essa operação é percebida como intencional, e não um processo em que houve decréscimo de detalhes.

A operação de discretizar não apenas tende a reduzir o número de elementos geométricos, mas também permite compreender situações estruturais, em que os eixos principais orientados das superfícies curvas são revelados. Nesse caso, a sequência criada na 3ª linha do Quadro 1 não apresenta uma direção específica de forças que poderiam estar atuando nas bordas (requisitando uma maior fragmentação das peças ou estarem o mais perpendicular possível a essa pressão a suportar). O algoritmo procede a uma divisão geométrica baseada em autossustentação (9).

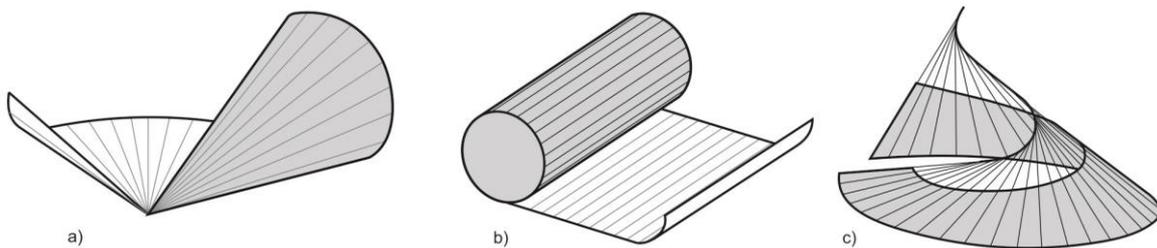
Tabela 1. Formação de superfícies a partir das curvas NURBS. Baseado em (5, 6, 7, 8, 10)



### c) Análise gaussiana

As superfícies podem ser classificadas em desenvolvíveis ou não desenvolvíveis (reversas). As superfícies desenvolvíveis são aquelas que, apesar da aparência curva, podem ser planificadas sem distorção, são abertas no plano por estiramento ou compressão. São também aquelas geradas por transformações do plano a partir de dobras, cortes, flexões ou rotações. Nessas superfícies é possível identificar uma geratriz que contém um plano tangente e desloca-se numa determinada direção, formando assim a superfície desenvolvível (ver Figura 1). Todas as superfícies desenvolvíveis tridimensionais são superfícies regradas (exceto os hiperboloides que não podem ser planificados) e podem ser descritas por linhas com determinadas trajetórias espaciais.

Figura 1. Conjunto de superfícies desenvolvíveis: a) cone; b) cilindro; c) superfície a partir da reta em translação helicoidal.



A análise gaussiana exibe, por meio de um espectro de cores, a classificação das porções das superfícies. Nessas circunstâncias de avaliação local, é possível ter quatro superfícies elementares: plana, cilíndrica, sinclástica (como numa superfície esférica), e anticlástica (como num parabolóide hiperbólico). Os trechos planos ou desenvolvíveis, os casos l) e n) do Quadro 1 são classificados de “curvatura zero”. Superfícies com porções esféricas possuem curvatura positiva, enquanto o caso m), superfície em sela, possui curvatura negativa. Mesmo superfícies reversas podem ser construídas, mas requisitarão fôrmas especialmente elaboradas para sua construção. Esse é o caso dos projetos não racionalizados, ilustrados nas primeiras linhas do Quadro 3, a ser mostrado mais adiante.

A análise gaussiana pode ser feita tanto na superfície original quanto naquela que já passou por discretização (nesse caso a análise ocorre sob sua configuração geral, e não em cada plano formado). Embora a análise gaussiana seja interessante para observar porções de superfícies que sejam difíceis de se construir, ela não permite uma análise que leve em consideração índices de flexão, compressão ou estiramento dos materiais, o que proporcionaria maior ganho à análise. De qualquer modo, as propriedades locais também se tornaram importantes, porque, por meio da análise gaussiana, é possível compreender o formato das curvaturas, revelando propriedades singulares de trechos geométricos (5).

### d) Otimizar

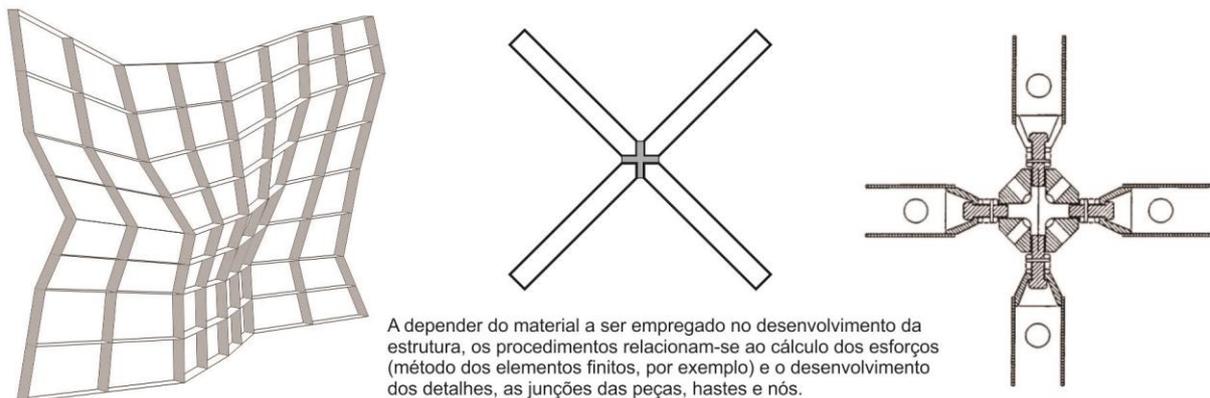
A operação de otimizar relaciona-se à busca de uma forma geométrica que possa ser interativamente modificada até que se obtenha uma configuração ideal, adequada a uma melhor eficiência geométrica, estrutural, funcional (5). A otimização relaciona-se a um conjunto de valores aceitáveis dentro das

variáveis de projeto. Em termos matemáticos relaciona-se a uma simplificação de um fenômeno complexo e, nessa circunstância, condicionada a determinada análise. A transformação de uma superfície complexa feita a partir de superfícies NURBS em um conjunto de geometrias que se estabelecem numa mesma coerência como a panelização, pode ser compreendida como um procedimento recorrente de otimização. Por meio de contínuas atualizações de uma superfície são buscados deslocamentos de vértices, arestas, deformações de conjuntos, possíveis variáveis de adequação a contornos ou extremidades. Diversos ajustes serão significativamente relevantes para o resultado final. Muitos algoritmos têm sido desenvolvidos para encontrar a melhor otimização com fins à panelização, apresentando a melhor resposta de cálculo estrutural da peça e de adequação a certos materiais. Desse modo, eliminar a restrição de suavidade costuma ser um passo importante para obter uma geometria válida no conjunto das estratégias adotadas (8).

#### e) Legitimar

A etapa final é o reconhecimento da superfície com fins à efetiva construção, o reconhecimento do sistema espacial adequado às restrições físicas da construção e também do orçamento. Com base nesse modelo realiza-se o cálculo estrutural, em que as peças concebidas são fundamentadas em sistemas pré-fabricados com um número reduzido de componentes. Na compreensão da forma irregular, a distribuição da carga pode ser mais razoável para a estrutura (ao atuar como casca, superfície de área estável), e os esforços suportados pelos componentes não levarão ao colapso do conjunto. As grandes estruturas podem variar em dimensões, mas permanecem repetitivas em termos de componentes. Nessa situação observa-se o potencial estrutural da geometria (8) assim como a elaboração de um possível quadro de repetições (ver Figura 2).

*Figura 2. Resultado do painel a ser construído. As peças (metálicas ou de madeira) podem ser executadas por corte CNC, já que todos os componentes são reconhecidos nos seus mínimos detalhes, inclusive encaixe.*

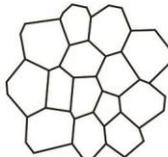
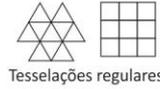
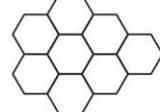


Além das etapas mencionadas anteriormente, dentre os inúmeros tipos de tesselações existentes costumam sobressair os métodos clássicos da *Triangulação de Delaunay* e o *Diagrama de Voroni* (ver Quadro 2). Essas tesselações clássicas são frequentemente implementadas com funções secundárias de arredondamento de bordas, mudanças de pesos dos pontos capazes de afetar suas abrangências, influências por pontos de atração

segundo elementos específicos, etc. De modo geral essas tarefas visam corroborar apelos estéticos digitais, formas artísticas simbólicas desse período contemporâneo (18). Não iremos detalhar a obtenção desses princípios, mas realizar um resumo de suas principais características. Para descrições pormenorizadas consultar Lima (19) e Tsai (20).

As tesselações mais comuns utilizadas baseiam-se nos padrões geométricos regulares do triângulo, retângulo e hexágono, muito embora outras associações sejam igualmente possíveis. Numa tesselação com malha triangular, por exemplo, se os triângulos são pequenos o suficiente em relação à curvatura, é possível se aproximar suavemente da sua configuração. Essa é uma classe de superfícies altamente úteis na arquitetura. De modo inverso, se os triângulos forem grandes (para redução do custo, por exemplo), a aproximação à superfície tende a ficar comprometida. Além disso, as bordas podem ficar irregulares, quando se deseja um recorte preciso, mas o mesmo não é atingido pelos triângulos (8). Frequentemente a adoção de um determinado formato padrão tende a comprometer as bordas e esse estudo deve ser realizado com cautela, não interferindo significativamente no resultado final.

Tabela 2. As tesselações mais comuns empreendidas na formação de painéis: Triangulação de Delaunay, Diagrama de Voronoi e demais agrupamentos regulares. Resumo baseado em (19) e (20). Fonte das imagens: (33, 34, 35).

TESSELAÇÃO DE SUPERFÍCIES MAIS COMUNS			
	Descrição geral	Características	
TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY	A malha se apresenta num processo estável de organização. Há uma dinâmica lógica cujo objetivo é maximizar essas formas triangulares. Isso não apenas se justifica nos usos das aplicações arquitetônicas, como também na formação de quaisquer outros objetos tridimensionais descritos computacionalmente.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- formação de triângulos com disposição máxima para sua forma equilátera;</li> <li>- racionalização de formas irregulares e formação de retículas;</li> <li>- o ritmo dos módulos triangulares é adaptável a pontos preexistentes;</li> <li>- novos pontos podem ser acrescentados ou removidos e afetam apenas as adjacências.</li> </ul>	 <p>Triangulação de Delaunay</p>  <p>MediaTIC, Barcelona, Espanha Arquiteto Enric Ruiz-Geli</p>
DIAGRAMA DE VORONOI	Constitui-se num fenômeno de organização que se aproxima dos mais diversos casos de arranjo celular. Essa simplicidade é recorrente em diferentes escalas, materiais e processos de ajustes naturais. O diagrama de Voronoi é ostensivamente explorado. Testes com diversas posições dos pontos alteram o equilíbrio geométrico que surge dessa interação.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- células ou polígonos convexos que compartilham faces e se ajustam perfeitamente;</li> <li>- podem ser ampliadas <i>ad infinitum</i> em qualquer direção, sem falhas ou lacunas;</li> <li>- divisão do espaço capaz de adaptar referências prefixadas;</li> <li>- os polígonos convexos possuem o mínimo de ligações e há um processo de ajuste simultâneo entre eles, ocupando o maior volume possível.</li> </ul>	 <p>Diagrama de Voronoi</p>  <p>Fry Building, Bristol, Inglaterra Arquiteto Wilkinson Eyre</p>
TESSELAÇÕES REGULARES	Outras tesselações são fundamentais para recobrir determinadas superfícies com padrões regulares, a partir de triângulos, retângulos e hexágonos. Elas solucionam problemas onde seja necessária a subdivisão do plano ou do espaço em regiões menores satisfazendo importantes propriedades geométricas. As tesselações podem ser também semirregulares, combinando dois ou três polígonos e produzindo efeitos bastante harmônicos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- as combinações geram regularidades de perímetros e ângulos, além de isometrias;</li> <li>- a tesselação ideal corresponde à união de todos os polígonos e suas fronteiras, abrangendo a superfície total;</li> <li>- a solução para os problemas de tesselação envolve geometria e topologia;</li> <li>- pode-se determinar um projeto visando utilizar figuras elementares (correspondendo a economia de material, apelo estético, etc.).</li> </ul>	 <p>Tesselações regulares</p>   <p>Eden Project, Inglaterra Arquiteto Nicholas Grimshaw</p>

## DISCUSSÃO

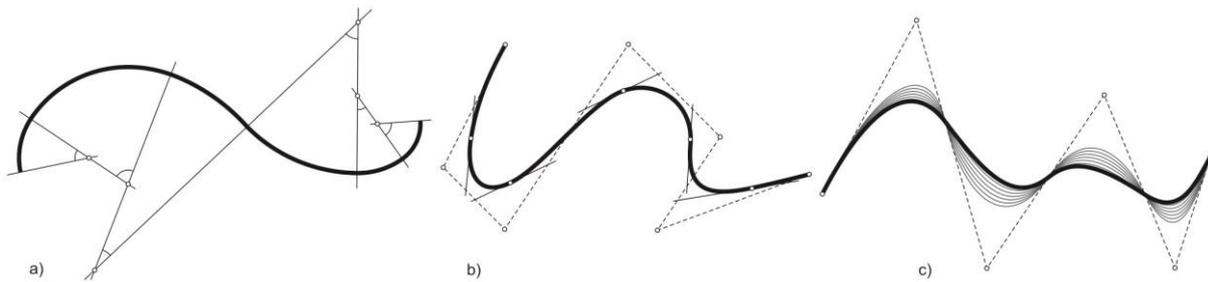
A criação dos modelos irregulares na arquitetura fez vir à tona um problema que sempre a acompanhou, mas que agora parece ter se agravado: o fato da representação não necessariamente ser índice adequado de sua construção, ou de não haver tectônica. A liberdade dada pelas superfícies NURBS tornou-se um grande problema, já que o espaço virtual do computador (com muitas vantagens na potência de criar e também não haver qualquer impedimento físico) a tudo permitiu (3). Nessas circunstâncias, as NURBS não impuseram restrição alguma e suas sutilezas só podem ser também executadas numa escala real por intermédio do próprio computador.

O problema trazido pelas superfícies NURBS relaciona-se à delicadeza e precisão com que é representada no computador e que ao mesmo tempo oculta a complexidade que envolve o seu próprio desenho. O controle absoluto de suas características pode ser comparado a um espaço de laboratório, um ambiente rigidamente controlado, meticulosamente calculado. A forma branda e elástica apta a qualquer ajuste conduz a possibilidades especulativas de inúmeras aparências. Serão esses os caracteres a requisitar um esforço na produção da escala real do edifício, resultando nos estudos das técnicas de tesselação. No entanto, como vimos anteriormente, para efeitos de execução e que ainda se resguarde o índice da curva aprazível, são necessários diversos procedimentos adaptativos dessa geometria inicial.

Boa parte das superfícies tradicionais é gerada por meio da varredura da curva de um perfil, capaz de se ajustar a qualquer linha. A parte superior do Quadro 1 ilustrou as varreduras mais comuns usando NURBS. Os casos a) e b) exemplificam situações em que uma determinada trajetória serve de orientação a outra linha, formando uma superfície de translação (ou também pode-se falar de extrusão linear reta ou curva). Nos casos c) e d), além desse princípio, deve haver também ajuste simultâneo das suas extremidades, o que ocorre por meio das gradações internas das *isocurves* (*isoparametric curves*), definindo aproximações de curvas internas horizontais e verticais.

Esse potencial amplamente incrementado na criação de superfícies irregulares permite realizar formas geométricas extremamente fluidas. Inicialmente utilizadas na indústria aeronáutica, naval e automotiva, posteriormente foram amplamente disseminadas nos *designs* de produtos (17). As curvas NURBS se prestam a situações de ajustes muito sutis, fazendo surgir também superfícies com mesmas qualidades, singulares, brandas. Além disso, essa delicadeza pode ser observada em tempo real. Ao mover os pontos de controle da curva (os nós constituintes da própria linha, ou aqueles externos que se apresentam tangentes à curvatura), qualquer usuário leigo é capaz de ajustá-la conforme seu desejo (1). Observe-se na Figura 3 que desde as operações mais elementares de concordância e tangência houve um aprimoramento exponencial na complexidade que envolve a construção dessas curvas, assim como das superfícies delas decorrentes, em funções matemáticas ajustáveis interativamente.

Figura 3. a) Linha curva baseada em tangência e concordância de arcos, cujos centros das circunferências devem pertencer à mesma reta; b) curva cúbica de bézier, com 7 nós e alças de controle de tangência na própria linha; c) curva NURBS, com alças de controle de influência ajustáveis externas à curva (as gradações em cinza indicam os ajustes sutis mais imediatos).



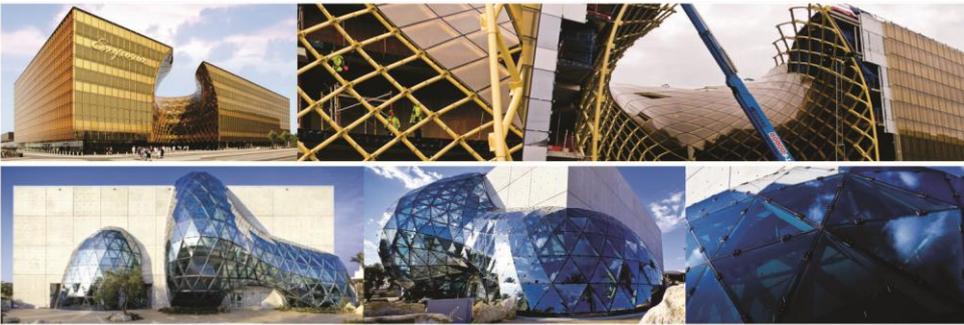
Assim, os estudos atuais envolvem não apenas a resolução difícil de expressões matemáticas incluídas nos algoritmos, como também várias abordagens para detectar propriedades que possam minimizar problemas de ordem construtiva. Apesar de esses objetivos serem bastante lógicos, ainda assim há uma quantidade extensa de projetos que não se orientam por essas premissas. Segundo Michael Eigensatz *et al.* (7), a panelização pode ocorrer em três situações: projeto de forma livre não racionalizado, pré-racionalizado ou pós-racionalizado. O Quadro 3 foi desenvolvido a partir das definições desses autores e acrescenta ainda uma lista de problemas relativos a cada uma das abordagens, assim como alguns exemplos de edifícios construídos.

Como se pode notar, esse quadro deixa sobressair o quanto os modelos criados com o auxílio do computador têm se tornado cada vez mais desafiadores. Modelos baseados em geometrias não euclidianas tornam-se cada vez mais comuns, cujos autores muitas vezes não são condescendentes com os seus resultados dos processos de projeto e requerem uma construção o mais fidedigna possível ao modelo digital. Nessa perspectiva, diversas reflexões para avaliar aspectos formais e estruturais são requisitadas, podendo ser encontradas em Robert Woodbury (21), Joy Ko e Kyle Steinfeld (11), Achim Menges (12), John L. Meek (22) Sebastian Bialkowski (23), Renaud Alexis Danhaive e Caitlin Mueller (24). Além dessas análises globais, é possível constatar também que muitas propriedades geométricas já conhecidas no passado são revisitadas e ampliadas. Nesse sentido, as técnicas da tesselação continuam sendo ostensivamente aperfeiçoadas, em pesquisas minuciosas, capazes de avaliar tanto a complexidade total da superfície quanto dos seus detalhes. Dentro desse quadro bastante extenso, algumas publicações recentes avançam e contribuem decisivamente nesse cenário, indicando de maneira mais assertiva os caminhos para a solução dos problemas: Wei Chang (25), Kaust Chi-Han Peng *et al.* (26), Sambit Datta *et al.* (27), Tsung-Hsien Wang *et al.* (28), Chengcheng Tang *et al.* (29), Caigui Jiang *et al.* (30), Volker Settigast *et al.* (15), Davide Pellis *et al.* (31), Eike Schling *et al.* (32).

Pelas tantas diversidades de objetivos a serem alcançados nos projetos, assim como de modelos computacionais, pode-se afirmar que não há uma abordagem inequívoca em relação à tesselação. Muitos pesquisadores têm se esforçado em diversificar os métodos, misturando painéis planares, curvos simples, curvos duplos, e para isso também é necessário construir diversos moldes únicos, já que se diferenciam nas angulações. Muitos esforços têm sido feitos na avaliação do conjunto de formas mínimas capazes de cobrir todas as porções das superfícies, encaixando os painéis dentro de um número finito de classes. Encontrar soluções envolvendo geometrias

associativas em *softwares* paramétricos e que ao mesmo tempo possam ser aplicadas a modelos muito singulares, com problemas específicos, tem gerado um conjunto de avanços extraordinários na área, confirmados pelos tantos edifícios complexos construídos na atualidade.

Tabela 3. Tesselção realizada em diferentes estágios do processo de projeto e suas implicações. Fonte das imagens: (36, 37, 38, 39, 40, 41)

TESSELAÇÃO APLICADA A DIFERENTES MOMENTOS DO PROJETO		
	Definição	Principais questões
PROJETO NÃO RACIONALIZADO	<p>Nessa circunstância a forma irregular não passa por nenhum procedimento de adaptação aos painéis (não houve ações para discretizar ou otimizar). A forma concebida será coberta por painéis de qualquer maneira, tendo curvatura simples ou dupla.</p>	<p>O projeto é levado à risca, sem quaisquer mudanças da sua concepção original. Todas as sutilezas alcançadas no âmbito computacional serão seguidas. Não existe ajuste da forma para com os painéis. As dificuldades de execução são enormes, situações nas quais os painéis precisam estar acomodados a curvaturas muito difíceis de serem realizadas, e em transições muito sutis. Formas especiais deverão ser executadas em ferro ou aço (para curvaturas de vidros) e formas de madeira polidas e revestidas com películas sintéticas para receber materiais derivados do plástico ou outros materiais. Cada peça estrutural e de painel é única, não há repetição. Para cada unidade é necessário haver uma forma especialmente moldada (normalmente concebida por meio de fabricação digital), milimetricamente concebida.</p>
	<p><b>Exemplos</b></p> <p>Fashion and Lace Museum Calais, França Arquiteto Alain Moatti</p> <p>Chanel Pavilion Nova Iorque, Paris, etc. Zaha Hadid Architects</p>	
PROJETO PRÉ-RACIONALIZADO	<p>Nesse caso o arquiteto procura desenvolver o projeto levando em consideração um conjunto de classes geométricas cuja grande maioria seja desenvolvível.</p>	<p>Desde o início o arquiteto precisa trabalhar com grupos de geometrias planificáveis e seus raciocínios são condicionados a elas. Nessa circunstância, a restrição geométrica representa um empecilho ao desenvolvimento do projeto. Para esses casos os trabalhos de Frank Gehry são emblemáticos, e seu processo de projeto parte do estudo de maquetes cujas formas se baseiam em flexões de papéis, folhas finas metálicas, folhas de plástico, etc. Apesar da forma complexa, busca-se uma grande viabilidade construtiva.</p>
	<p>Walt Disney Concert Hall Los Angeles, EUA, 2003 Frank Gehry</p> <p>Swiss Re Headquarters Londres, Inglaterra, 2004 Norman Foster</p>	
PROJETO PÓS-RACIONALIZADO	<p>Aqui há a transformação de uma ideia inicial em um conjunto de geometrias que facilitem o resultado final, em termos de construção, facilidade de execução, menor custo, tamanho das peças.</p>	<p>Pensar numa pós-racionalização implica o trabalho estar aberto às várias prerrogativas que possam afetar uma dada concepção inicial. Essa concepção de que se fala aqui não é decorrente de um insight criativo fruto de intuição. Ao contrário, mesmo após ter sido realizada uma série de estudos sobre o local, elencado fatores para compreensão do entorno, do sítio, questões ambientais, funcionais e estéticas e etc., ainda assim há abertura para adequar a proposta a fatores de melhor viabilização. O projeto pós-racionalizado segue as prerrogativas elencadas no Quadro 01, explicado anteriormente.</p>
	<p>Emporia Shopping Center Malmö, Suécia, 2012 Wingårdh Arkitektkontor</p> <p>Salvador Dalí Museum St. Petersburg, Florida, EUA HOK Architects</p>	

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fragmentar uma determinada superfície (preferencialmente com alta taxa de repetição) é uma estratégia muito importante na elaboração da forma arquitetônica. Constitui uma exploração importante na formação espacial com possibilidade de porções extensivas, com continuidades em diferentes direções. A subdivisão espacial pode ocorrer com elementos bidimensionais ou tridimensionais. A lógica por trás da formação de tais figuras compreende um tipo de associação geométrica, de modo que as forças atuantes sejam qualitativamente compostas, inclusive proporcionando soluções de impacto tridimensional com possibilidades de tectônica incomum.

Ao longo dos anos o processo de fragmentação das geometrias complexas para outros tipos de agrupamentos fez surgir métodos de compreensão e avaliação dos vários tipos de superfícies. Mesmo sendo reduzidas a unidades, ainda poderia haver casos em que inúmeras porções seriam produzidas com dificuldade. Nesse sentido, se houver uma divisão da superfície de forma arbitrária, muito provavelmente os painéis conterão dupla curvatura e poderão ser considerados ainda complexos.

O ideal de panelização a partir de qualquer princípio matemático, é que atenda aos seguintes critérios: possuir repetição máxima (viabilizando a pré-fabricação das peças); constituir-se a partir de polígonos dentro de uma geometria mais básica e relativamente simples de ser manipulada; ser composta por peças planas e haver repetição exata das peças sem tolerâncias, lacunas ou distorções estéticas; ter relativa perda da suavidade; conter possibilidade de *design* flexível e interativo, tanto no sentido de uma pré-racionalização (quando o arquiteto assume desde o início do projeto trabalhar com superfícies desenvolvíveis), ou de uma pós-racionalização (quando ocorre a conversão da forma concebida inicialmente para uma fragmentação em geometrias menores).

De qualquer modo, nem todos os desafios promovidos pelas concepções das formas livres foram superados. É muito provável que, no decorrer dos próximos anos, surjam outras técnicas computacionais capazes de conduzir a resultados mais interessantes. Nessas atuais circunstâncias, ao que tudo indica, visam atender não apenas as questões técnicas de uma execução, mas principalmente aos desejos de uma sociedade largamente exposta às diferentes ficções das mídias digitais, provendo novas expressões visuais para essa contemporaneidade.

## REFERÊNCIAS

1. KOLAREVIC, Branko. *Architecture in digital age: design and manufacturing*. Nova Iorque: Spon Press, 2003. ISBN 1134470444.
2. STACEY, Michael, BEESLEY, Philip, HUI, Vincent. *Digital fabricators*. Canada, Waterloo: University of Waterloo School of Architecture Press, 2004. ISBN 1897001037.
3. MACHADO, Arlindo. *Máquina e Imaginário*. São Paulo: EDUSP, 2000. ISBN 85-314-0143-7.
4. PIAZZALUNGA, Renata. *A virtualização da arquitetura*. Campinas: Papyrus, 2005. ISBN 9788530807863.

5. POTTMANN, Helmut, EIGENSATZ, Michael, VAXMAN, Amir, WALLNER, Johannes. Architectural geometry. *Computers and Graphics Journal*. V. 47 I.C, 2015, p145-164. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cag.2014.11.002>
6. TOMIČIĆ, Marko. *Freeform geometries in wood construction*. Institute of Discrete Mathematics and Geometry. Technische Universität Wien. Vienna University of Technology. 2013. Available from: <https://vdocuments.site/freeform-geometries-in-wood-construction-marko-tomicic.html>
7. EIGENSATZ, Michael, SCHIFTNER, Alexander, LEDUC, Nicolas, BOMPAS, Philippe, BALDASSINI, Niccolo. Architectural geometry from research to practice: The Eiffel Tower Pavilions. In.: HESSELGREN, Lars, SHARMA, Shrikant, WALLNER, Johannes, BALDASSINI, Niccolo, BOMPAS, Philippe, RAYNAUD, Jacques (Eds.). *Advances in Architectural Geometry 2012*, Vienna: Springer, 2012. p.213-228. ISBN 978-3-7091-1250-2. [https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1251-9\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1251-9_17)
8. EIGENSATZ, Michael, HUARD, Mathieu, BOMPAS, Philippe. Planar panelization with extreme repetition. In.: BLOCK, Philippe, KNIPPERS, Jan, MITRA, Niloy J., WANG, Wenping. (Eds.) *Advances in architectural geometry 2014*, Cham: Springer, 2014. p.259-279. ISBN 978-3-319-11417-0. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-11418-7\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11418-7_17)
9. RIPPMANN, Matthias, BLOCK, Philippe. Computational Tessellation of Freeform, Cut-Stone Vaults. *Nexus Network Journal*. Kim Williams Books, 2018, V.20, I.3, p.545–566. <https://doi.org/10.1007/s00004-018-0383-y>
10. SECHELMANN, Stefan, RÖRIG, Thilo, KYCIA, Agata, FLEISCHMANN, Moritz. Surface panelization using periodic conformal maps. In.: BLOCK, Philippe, KNIPPERS, Jan, MITRA, Niloy J., WANG, Wenping. (Eds.) *Advances in architectural geometry 2014*, Cham: Springer, 2014. p.199-214. ISBN 978-3-319-11417-0 [https://doi.org/10.1007/978-3-319-11418-7\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11418-7_13)
11. KO, Joy, STEINFELD, Kyle. *Geometric computation: foundations for design*. Oxford: Routledge, 2018. ISBN 9780415811972
12. MENGES, Achim. *Material synthesis: fusing the physical and the computational*. Architectural Design. London: Academy Press, John Wiley, 2015. ISBN 111887837X
13. BRITTON, Jill. *Investigation patterns: symmetry and tessellations*. Parsippany, New Jersey: Dale Seymour, 1999. ISBN 0769000835
14. FULLER, Buckminster, LÓPEZ-PÉREZ, Daniel. *Pattern-thinking*. Zurich, Switzerland: Lars Müller Publishers, 2020. ISBN-10: 3037786094
15. SETTGAST, Volker, MÜLLER, Kerstin, FÜNFZIG, Christoph, FELLNER, Dieter. Adaptative tessellation of subdivision surfaces. In.: *Computers & Graphics*. Vol.28, 2004, p.73-78. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2003.10.006>
16. ISSA, Rajaa. *Rhinoceros. NURBS modeling for Windows. Paneling Tools*. Robert McNeel & Associates, 2013. Available from: <https://wiki.mcneel.com/media/labs/panelingtoolsmanual.pdf>
17. POTTMANN, Helmut, ASPERL, Andreas, HOFER, Michael, KILIAN, Axel. *Architectural geometry*. Exton: Bentley Institute Press, 2007. ISBN 978-1934493045
18. LIMA, Fábio F. *Espaços sem fronteiras: arte e arquitetura digital*. Doutorado. Universidade de Brasília, 2015. <https://doi.org/10.26512/2015.08.t.19550>
19. LIMA, Fábio F. Arquiteturas digitais a partir do Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay. *Revista Projetar - Projeto e Percepção do Ambiente*, 2017. v. 2, n. 2, p.52-60. Available from: <https://periodicos.ufrn.br/revprojetar/article/view/16583>
20. TSAI, Victor J. D. Fast topological construction of delaunay triangulations and voronoi diagrams. *Computer & Geosciences*. 1993. Vol. 19, I. 10, p.1463-1474. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(93\)90062-a](https://doi.org/10.1016/0098-3004(93)90062-a)
21. WOODBURY, Robert. *Elements of Parametric Design*. Routledge, London, New York, 2010. ISBN 0415779871

22. MEEK, John L. *Computer methods in structural analysis*. London: Taylor & Francis Ltd, 1991. ISBN 1138470384
23. BIALKOWSKI, Sebastian. Structural optimization methods as a new toolset for architects. *eCAADe. Design Tools. Explorations*. 2016. Vol 2, p. 255-264. Available from: [http://papers.cumincad.org/data/works/att/ecaade2016\\_098.pdf](http://papers.cumincad.org/data/works/att/ecaade2016_098.pdf)
24. DANHAIVE, Renaud Alexis, MUELLER, Caitlin. Combining parametric modeling and interactive optimization for high-performance and creative structural design. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS)*, Amsterdam, 2015, Available from: <https://www.ingentaconnect.com/content/iass/piass>
25. CHANG, Wei. Application of tessellation in architectural geometry design. *International Conference on Energy Materials and Environment Engineering ICEMEE*, 2018. Vol.38. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20183803015>
26. CHI-HAN PENG, Kaust, POTTMANN, Helmut, PETER WONKA, Kaust. Designing patterns using triangle-quad hybrid meshes. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, Vol. 37, No. 4, Article107. <https://doi.org/10.1145/3197517.3201306>
27. DATTA, Sambit, HANAFIN, Stuart, WOODBURY, Robert. Responsive envelope tessellation and stochastic rotation of 4-fold pentiles. *Frontiers of architectural research*, 2014. Vol. 3, p.192-198. <https://doi.org/10.1016/j.foar.2014.03.002>
28. WANG, Tsung-Hsien, KRISHNAMURTI, Ramesh, SHIMADA, Kenji. Restructuring surface tessellation with irregular boundary conditions. *Frontiers of architectural research*, 2014. Vol. 3, I.4. p.337-347. <https://doi.org/10.1016/j.foar.2014.06.001>
29. TANG, Chengcheng, KILIAN, Martin, BO, Pengbo, WALLNER, Johannes, POTTMANN, Helmut. Analysis and design of curved support structures. In.: ADRIAENSSENS, Sigrid, GRAMAZIO, Fabio, KOHLER, Matthias, MENGES, Achim, PAULY, Mark. (Eds.) *Advances in architectural geometry 2016*. Zurich: ETH, 2016. ISBN 978-3-7281-3778-4. Available from <https://vdf.ch/advances-in-architectural-geometry-2016-e-book.html>
30. JIANG, Caigui, GÜNTHER, Felix, WALLNER, Johannes, POTTMANN, Helmut. Measuring and controlling fairness of triangulations. In.: ADRIAENSSENS, Sigrid, GRAMAZIO, Fabio, KOHLER, Matthias, MENGES, Achim, PAULY, Mark. (Eds.) *Advances in architectural geometry 2016*. Zurich: ETH, 2016. Available from <https://vdf.ch/advances-in-architectural-geometry-2016-e-book.html>
31. PELLIS, Davide, POTTMANN, Helmut. Aligning principal stress and curvature directions. In.: HESSELGREN, Lars, KILIAN, Axel, MALEK, Samar, OLSSON, Karl-Gunnar, SORKINE-HORNUNG, Olga, WILLIAMS, Chris. *Advances in architectural geometry 2018*. Vienna: Klein Publishing GmbH, 2018, p. 34-53. Available from [https://research.chalmers.se/publication/504188/file/504188\\_Fulltext.pdf](https://research.chalmers.se/publication/504188/file/504188_Fulltext.pdf) ISBN: 978-3-903015-13-5
32. SCHLING, Eike, KILIAN, Martin, WANG Hui, SCHINKORE, Jonas, POTTMANN, Helmut. Design and construction of curved support structures with repetitive parameters. In.: HESSELGREN, Lars, KILIAN, Axel, MALEK, Samar, OLSSON, Karl-Gunnar, SORKINE-HORNUNG, Olga, WILLIAMS, Chris. *Advances in architectural geometry 2018*. Vienna: Klein Publishing GmbH, 2018, p. 140-165. Available from [https://research.chalmers.se/publication/504188/file/504188\\_Fulltext.pdf](https://research.chalmers.se/publication/504188/file/504188_Fulltext.pdf) ISBN: 978-3-903015-13-5
33. MEDIATIC. Enric Ruiz Geli. Media-ICT building CZFB. [Accessed 08 feb 2020]. Available from: <https://www.ruiz-geli.com/projects/built/media-tic>
34. FRY BUILDING. Wilkinson Eyre. [Accessed 08 feb 2020]. Available from: <https://www.wilkinsoneyre.com/projects/university-of-bristol-fry-building>
35. EDEN PROJECT. Nicholas Grimshaw. [Accessed 08 feb 2020]. Available from: [www.grimshaw.global.com](http://www.grimshaw.global.com)
36. FASHION AND LACE MUSEUM. Alain Moatti. [Accessed 12 feb 2020]. Available from: [www.moatti-riviere.com](http://www.moatti-riviere.com)

37. CHANEL PAVILION. Zaha Hadid Architects. [Acessed 12 feb 2020]. Available from: [www.zaha-hadid.com](http://www.zaha-hadid.com)
38. WALT DISNEY CONCERT HALL. Frank Gehry. [Acessed 12 feb 2020]. Available from: [www.foga.com](http://www.foga.com)
39. SWISS RE HEADQUARTERS. Foster + Partners. 30 St Mary Axe – Swiss Re [Acessed 12 feb 2020]. Available from: <https://www.fosterandpartners.com/projects/30-st-mary-axe>
40. EMPORIA SHOPPING CENTER. Wingårdh Arkitektkontor. [Acessed 12 feb 2020]. Available from: [www.wingardhs.se](http://www.wingardhs.se)
41. SALVADOR DALI MUSEUM. HOK Architects. [Acessed 12 feb 2020]. Available from: [www.hok.com](http://www.hok.com)

**Submetido: 25/04/2020**  
**Aceito: 02/09/2020**